

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	9
1.1	Vorbemerkungen	9
1.1.1	Zahlenmengen	9
1.1.2	Kongruenzen	9
1.1.3	Weitere wichtige Ergebnisse	12
1.1.4	Quadratische Körper über \mathbb{Q}	15
1.2	Die g -adische Entwicklung	15
1.3	Die regelmäßige Kettenbruchentwicklung	20
1.3.1	Algorithmus des regelmäßigen Kettenbruches	21
1.4	Eine Klassifikation der Irrationalitätsbeweise	24
1.4.1	Existenzbeweise	24
1.4.2	Widerspruchsbeweise	25
1.4.3	Darstellungsbeweise	25
1.4.4	Umformulierungsbeweise	26
1.4.5	Transzendenzbeweise	26
2	Existenzbeweise	27
2.1	Nichtkonstruktive Existenzbeweise	27
2.1.1	CANTORS Abzählbarkeitsargument	27
2.1.2	Lineare Unabhängigkeit über \mathbb{Q}	31
2.2	Konstruktive Existenzbeweise	33
2.2.1	Irrationale Dezimalbruchentwicklungen	33
2.2.2	Irrationale Kettenbrüche	35
3	Widerspruchsbeweise	37
3.1	Geometrische Beweise	37
3.1.1	Die PYTHAGORäische Zahl	37
3.1.2	Wurzeln natürlicher Zahlen	38
3.2	Arithmetische Beweise	43
3.2.1	Der Klassiker	43
3.2.2	Quadratwurzeln natürlicher Zahlen	44
3.2.3	Nullstellen algebraischer Polynome	47
3.2.4	Weitere Anwendungen des GAUSS-Lemmas	50
3.2.5	Logarithmen mit natürlichen Basen	58
3.3	Analytische Beweise	60
3.3.1	Die analytische Standardmethode	60
3.3.2	Beispiele zur analytischen Standardmethode	61
3.3.3	Weitere analytische Ergebnisse im Überblick	78
4	Darstellungsbeweise	83
4.1	Reihendarstellungen	83
4.1.1	Konstanten mit bekannter Dezimalbruchentwicklung	83
4.1.2	Die CANTOR-Entwicklung	88

4.2	Kettenbruchentwicklungen	94
4.2.1	Die Sätze von EULER und LAGRANGE	94
4.2.2	Ein weiterer Beweis für $\sqrt{2}$	95
4.2.3	Noch einmal der Goldene Schnitt	96
4.2.4	Die regelmäßigen Kettenbrüche spezieller Werte der Exponentialfunktion	96
4.2.5	Eine Kettenbruchentwicklung von $\tan(x)$ und die Irrationalität von π	99
4.3	Irrational-abgeschlossene Funktionen	107
4.3.1	Die RIEMANNSche Zeta-Funktion an geraden Argumentstellen	107
4.3.2	Ein alternativer Beweis für $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$	111
4.3.3	Rationalkombinationen und Produkte bestimmter Zeta-Funktionswerte	114
4.3.4	DIRICHLET-Reihen	116
4.3.5	Spezielle Werte der Gamma-Funktion	126
4.3.6	Das VIETA-Produkt	128
5	Diophantische Approximation und Diophantische Gleichungen	131
5.1	Einleitung	131
5.2	DIOPHANTISCHE Approximation	131
5.2.1	Elementare Ergebnisse	132
5.2.2	Bestmögliche Approximation	140
5.2.3	Irrationalitätsmaße	145
5.3	DIOPHANTISCHE Gleichungen	151
6	Transzendenzbeweise	161
6.1	Algebraische Zahlen	161
6.1.1	Primitive Polynome	165
6.1.2	Minimalpolynome und algebraischer Grad	167
6.2	Das LIOUVILLESche Verfahren	171
6.2.1	Der Approximationssatz	172
6.3	Die Transzendenz von e	175
6.4	Die Transzendenz von π	180
6.5	Weitere Ergebnisse in der Übersicht	189
A	Transzendenz von π und Kreisquadratur	197
	Literaturverzeichnis	199
	Index	207