12 Überblick über die Theorie der hyperbolischen Gruppen

Wie wir schon in Beispielen gesehen haben, studiert man oft geometrische Objekte dadurch, dass man ihre Isometriegruppen betrachtet. Gromov [Gr] hat diesen Ansatz gewissermaßen umgekehrt, indem er die Gruppen selbst zu geometrischen Objekten gemacht hat und dann Eigenschaften der Gruppen untersuchte, deren Cayley–Graphen gewisse geometrische Eigenschaften haben. Insbesondere hat er die hyperbolischen Gruppen eingeführt, also die Gruppen, deren Cayley–Graphen geometrische Eigenschaften der hyperbolischen Geometrie erfüllen. Dies führte zu einem neuen Zweig der Gruppentheorie, der *Geometrischen Gruppentheorie*.
Gromovs ursprüngliche Idee war zweifach. Erstens wollte er die Theorie der Small–Cancellation–Gruppen verallgemeinern. Zweitens wollte er die Techniken erweitern, die man anwendet, wenn man Fundamentalgruppen hyperbolischer Mannigfaltigkeiten wie etwa die Flächengruppen untersucht unter Verwendung der geometrischen Eigenschaften der Mannigfaltigkeiten. Verbunden wird das durch die Beziehungen zwischen der algebraischen Struktur der Gruppen und der geometrischen Struktur der Cayley–Graphen.
Zur Theorie der hyperbolischen Gruppen gibt es einige sehr gute Veröffentlichungen und Übersichtsartikel (vgl. etwa [ABCFLMSS], [CDP], [GdlH], [Ge], [Gr] und [Oh]). Grundlage für die folgenden Kapitel sind insbesondere [GdlH], [Ge] und [Gr]. Das Kapitel 12 dient hier als kurze Einführung in die Theorie.

Definition 12.1

Eine Gruppe Γ heißt **von endlichem Typ**, wenn Γ endlich erzeugt ist und **endlich präsentierbar**, wenn Γ von endlichem Typ ist und durch endlich viele definierende Relationen beschrieben werden kann.

Ist Γ eine Gruppe von endlichem Typ, so bezeichne S normalerweise eine endliche Menge von Erzeugenden für Γ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $1 \notin S$, 1 die Eins von Γ, und

(ii) S ist **symmetrisch**, d.h. ist $\gamma \in S$, so ist auch $\gamma^{-1} \in S$.

Bemerkung:

Wir nennen ein endliches Erzeugendensystem mit den Eigenschaften (i) und (ii) **zulässig**.

Gegeben sei nun ein Paar (Γ, S) wie oben. Dann können wir einen metrischen Raum (auf dem Paar) einführen. Definiere $l_S : \Gamma \to [0, \infty)$ wie folgt: Ist $\gamma \in \Gamma$, so sei $l_S(\gamma) = 0$ falls $\gamma = 1$, und ist $\gamma \neq 1$ so sei $l_S(\gamma)$ die minimale Länge eines

Wortes, welches vollständig konstruiert ist mit Elementen von S und γ darstellt. Diese Länge heißt auch S–**Länge**.
Wir definieren nun die gesuchte Metrik $d_S : \Gamma \times \Gamma \to [0, \infty)$ mittels

$$d_S(\gamma_1, \gamma_2) = l_S\left(\gamma_1^{-1}\gamma_2\right).$$

d_S ist eine Metrik:

i) "$l_S(\gamma) = 0 \Leftrightarrow \gamma = 1$" impliziert "$d_S(\gamma_1, \gamma_2) = 0 \Leftrightarrow \gamma_1 = \gamma_2$".

ii) $d_S(\gamma_1, \gamma_2) = l_S\left(\gamma_1^{-1}\gamma_2\right) = l_S\left(\gamma_2^{-1}\gamma_1\right) = d_S(\gamma_2, \gamma_1)$, da S symmetrisch ist.

iii) $d_S(\gamma_1, \gamma_2) \leq d_S(\gamma_1, \beta) + d_S(\beta, \gamma_2)$ für alle $\gamma_1, \gamma_2, \beta \in \Gamma$ wegen $\gamma_1^{-1}\gamma_2 = \gamma_1^{-1}\beta\beta^{-1}\gamma_2$.

Bemerkungen:

1) Die metrische Struktur auf (Γ, S) hängt von der Wahl von S ab. Ist etwa $\Gamma = \mathbb{Z}$ und $S = \{\pm 1\}$, so ist $d_S(0,1) = 1$, und ist $S' = \{\pm 2, \pm 3\}$, so ist $d_{S'}(0,1) = 2$.

2) Die metrische Struktur auf (Γ, S) ist geerbt von der "natürlichen" metrischen Struktur für den Cayley–Graphen bzgl. (Γ, S): Die Ecken sind die Elemente von Γ, und zwei Ecken γ_1 und γ_2 sind verbunden durch eine Kante genau dann, wenn es ein $\sigma \in S$ gibt mit $\gamma_1\sigma = \gamma_2$. Parametrisieren wir so, dass jede Kante des Cayley–Graphen die Länge 1 hat, so ist die Metrik für (Γ, S) geerbt von der für den Cayley–Graphen für (Γ, S). Wir erweitern hierbei die Metrik für den Cayley–Graphen in der üblichen Weise für alle Paare von Punkten auf Kanten, indem wir jede Kante zu einem Intervall der Länge eins machen.
Dadurch wird der Cayley–Graph zu einem geodätischen metrischen Raum. Wir betrachten den Cayley–Graphen stets auch in diesem Sinne, ohne dass Missverständnisse entstehen.
Jeder geschlossene Weg repräsentiert eine Relation. Wenn wir für jeden geschlossenen Weg im Cayley–Graphen eine 2–Zelle einbauen, erhalten wir einen einfach zusammenhängenden 2–Komplex, den **Cayley–Komplex**.

Die Wahl von S beeinflusst die Konstruktion des Cayley–Graphen genauso wie die Metrik von (Γ, S). Was wir also wünschen ist eine Äquivalenzrelation, welche erlaubt, die verschiedenen metrischen Räume für Γ zu verbinden, wenn wir S abändern.

Definition 12.2

Seien (X, d) und (X', d') metrische Räume. (X, d) und (X', d') heißen **quasi–isometrisch**, wenn es Funktionen $f : X \to X'$ und $g : X' \to X$ gibt zusammen mit Konstanten $\lambda > 0$ und $C \geq 0$, so dass

(i) $d'(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) + C \ \forall x, y \in X$,

(ii) $d(g(x'), g(y')) \leq \lambda d'(x', y') + C \ \forall x', y' \in X'$,

(iii) $d(g(f(x)), x) \leq C \ \forall x \in X$,

(iv) $d'(f(g(x')), x') \leq C \ \forall x' \in X'$.

Interpretation aus großer Entfernung (wenn C kaum noch von 0 unterschieden werden kann):

1) (i) und (ii) suggerieren, dass f und g Lipschitz sind,

2) (iii) und (iv) suggerieren, dass f und g inverse Isometrien sind.

Satz 12.3

Quasi–Isometrie ist eine Äquivalenzrelation in der Klasse der metrischen Räume.

Beweis.
Natürlich ist Quasi–Isometrie reflexiv und symmetrisch. Wir zeigen die Transitivität. Seien also (X, d) und (X', d') sowie (X', d') und (X'', d'') quasi–isometrisch. Wir haben also Funktionen $X \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} X'$, $X' \underset{g'}{\overset{f'}{\rightleftarrows}} X''$ und Konstanten λ, C bzw. λ', C', so dass jeweils (i)–(iv) erfüllt sind. Wir suchen Funktionen $X \underset{g''}{\overset{f''}{\rightleftarrows}} X''$ und Konstanten λ'', C'', so dass (i)–(iv) aus Defintiton 12.2 erfüllt sind.
Setze $f'' = f' \circ f$ und $g'' = g \circ g'$, $\lambda'' = \lambda\lambda'$ und $C'' = 2C + 2C' + \lambda' C + \lambda C'$.

zu (i): Seien $x, y \in X$. Dann ist

$$\begin{aligned} d''(f''(x), f''(y)) &= d''(f'(f(x)), f'(f(y))) \\ &\leq \lambda' d'(f(x), f(y)) + C' \\ &\leq \lambda'[\lambda d(x, y) + C] + C' = \lambda'\lambda d(x, y) + C' + \lambda' C \\ &\leq \lambda'' d(x, y) + C''. \end{aligned}$$

zu (ii): Analog.

zu (iii): Sei $x \in X$. Zunächst ist (nach Voraussetzung)

$$d'(g' \circ f'(f(x)), f(x)) \leq C'$$

und daher wegen (ii)

$$d\left(g\left(g'\circ f'\left(f\left(x\right)\right)\right), g\left(f\left(x\right)\right)\right)\leq \lambda C' + C.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} d\left(g''\circ f''\left(x\right), x\right) &\leq d\left(g''\circ f''\left(x\right), g\left(f\left(x\right)\right)\right) + d\left(g\left(f\left(x\right)\right), x\right) \\ &\leq (\lambda C' + C) + C = \lambda C' + 2C \leq C''. \end{aligned}$$

zu (iv): Analog. □

Satz 12.4

Sei Γ eine Gruppe von endlichem Typ mit endlichen, symmetrischen Erzeugendensystemen S und S', die beide 1 nicht enthalten. Dann sind die metrischen Räume zu (Γ, S) und (Γ, S') quasi–isometrisch.

Beweis.
Wir suchen geeignete f, g, λ und C. Nehme $f = \mathrm{id}_{(\Gamma,S)}$, $g = \mathrm{id}_{(\Gamma,S')}$, $C = 0$ und $\lambda = \max\left(\{l_{S'}(\gamma) \mid \gamma \in S\} \cup \{l_S(\gamma') \mid \gamma' \in S'\}\right)$.

Wir verifizieren (i): Seien $x, y \in (\Gamma, S)$. Dann ist

$$d_{S'}\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) = l_{S'}\left(f\left(x\right)^{-1} f\left(y\right)\right) = l_{S'}\left(x^{-1}y\right).$$

Unsere Definition von λ erlaubt nun $l_{S'}(x^{-1}y) \leq \lambda l_S(x^{-1}y)$, denn:
Schreiben wir $x^{-1}y$ als ein Produkt (von Elementen von S) mit Länge k, so können wir sicher $x^{-1}y$ schreiben als ein Produkt (von Elementen von S') einer Länge $\leq \lambda k$. Also ist

$$d_{S'}\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) \leq \lambda l_S\left(x^{-1}y\right) = \lambda d_S\left(x, y\right) + C.$$

Der Beweis von (ii) ist analog; (iii) und (iv) sind klar, da f und g invers zueinander sind. □

Folgerung:
Die Quasi–Isometrieklasse der metrischen Räume zu (Γ, S), S endlich, ist eine Invariante der Gruppe Γ von endlichem Typ und hängt nicht ab von der (endlichen) Erzeugendenmenge S.

Frage: Ist diese Invariante geeignet, gruppentheoretische Eigenschaften von Γ zu untersuchen, und inwieweit bleiben gruppentheoretische Eigenschaften unter Quasi–Isometrie erhalten?

Bemerkung:
Zwei endliche Gruppen Γ_1, Γ_2 sind quasi–isometrisch (genauer: die metrischen Räume für (Γ_1, S_1) und (Γ_2, S_2), S_1, S_2 endlich, sind quasi–isometrisch9.
Denn: Nehme einfach C groß genug.

Allgemein nennen wir zwei Gruppen Γ_1 und Γ_2 von endlichem Typ quasi–isometrisch, wenn die metrischen Räume für (Γ_1, S_1), S_1 endliches Erzeugendensystem für Γ_1, und (Γ_2, S_2), S_2 endliches Erzeugendensystem für Γ_2, es sind.

Die obige Beobachtung für endliche Gruppen kann man gut verallgemeinern.

Definition 12.5

Zwei Gruppen Γ_1 und Γ_2 heißen **kommensurabel**, wenn es Untergruppen $\Gamma_i' < \Gamma_i$, $i = 1, 2$, von endlichem Index gibt mit $\Gamma_1' \cong \Gamma_2'$.

Beachte: Zwei endliche Gruppen sind kommensurabel (etwa $\{1\}$ ist von endlichem Index in beiden).

Bemerkung:
Allgemeiner kann gezeigt werden, dass je zwei kommensurable Gruppen von endlichem Typ quasi–isometrisch sind. Die Umkehrung ist nicht richtig. Es gibt Beispiele zweier Gruppen von endlichem Typ, die quasi–isometrisch, aber nicht kommensurabel sind. Es gibt aber interessante Zusammenhänge:
Ist etwa Γ eine Gruppe von endlichem Typ, die quasi–isometrisch zu $\mathbb{Z}^n$, $n \in \mathbb{N}$, ist, so muss Γ eine Untergruppe Γ' von endlichem Index enthalten mit $\Gamma' \cong \mathbb{Z}^n$.
Oder ist Γ von endlichem Typ und quasi–isometrisch zu einer freien Gruppe, so hat Γ eine freie Untergruppe von endlichem Index.

Kommen wir jetzt zum Objekt der **hyperbolischen metrischen Räume** — en route zum Begriff von einer **hyperbolischen Gruppe**.

Notation:
Ist (X, d) ein metrischer Raum, so schreiben wir jetzt meist $|x - y|$ statt $d(x, y)$; $x, y \in X$.

Definition 12.6

a) Seien $x_0, x_1 \in X$ mit $a = |x_1 - x_0|$. Ein **geodätisches Segment** in X beginnend bei x_0 und endend bei x_1 ist eine Isometrie $g : [0, a] \to X$ mit $g(0) = x_0$ und $g(a) = x_1$. Wir sagen, dass X ein **geodätischer Raum** ist, wenn es für alle $x_0, x_1 \in X$ ein geodätisches Segment in X gibt beginnend bei x_0 und endend bei x_1.

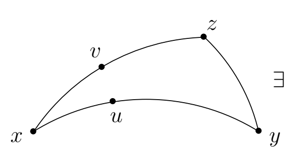
b) Ein **geodätisches Dreieck** in X mit $x, y, z \in X$ als Ecken ist die Vereinigung von drei geodätischen Segmenten mit (paarweise) x, y und z als Endpunkte. (Beachte: Entartete Dreiecke sind zugelassen, solche wie $y = z$ und die geodätischen Segmente von x nach y und x nach z sind verschieden.)

Ein erstes Beispiel eines geodätischen Raumes ist der Cayley–Graph für eine Gruppe von endlichem Typ (bei endlichem Erzeugendensystem S). Ist der Cayley–Graph kein Baum, so enthält er einen Kreis (oder eingebetteten Loop). Also ist mehr als ein geodätisches Segment zwischen demselben Paar von Punkten zugelassen.

Notation:
Seien $x_0, x_1 \in X$, X geodätischer Raum. Obwohl mehrere geodätische Segmente in X mit Endpunkten x_0 und x_1 zugelassen sind, bezeichnen wir mit $[x_0, x_1]$ ein gegebenes geodätisches Segment mit x_0 und x_1 als Endpunkte (x_0 Anfangs–, x_1 Endpunkt).

Definition 12.7

Sei $\delta \geq 0$. Wir sagen, dass der geodätische Raum X die **Rips–Bedingung für die Konstante** δ erfüllt, wenn für jedes geodätische Dreieck $[x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$ in X und für jedes $u \in [x, y]$ gilt: $d\,(u, [y, z] \cup [z, x]) \leq \delta$.



$\exists\ v$ mit $d\,(u, v) = |u - v| \leq \delta$

Wir nennen den geodätischen Raum X **hyperbolisch**, wenn er die Rips–Bedingung für eine Konstante $\delta \geq 0$ erfüllt.

Satz 12.8

Seien X_1 und X_2 geodätische Räume, die quasi–isometrisch sind. Ist X_1 hyperbolisch, so auch X_2.

Den Beweis führen wir in Satz 16.11.

Also respektieren Quasi–Isometrien die hyperbolische Eigenschaft.

Definition 12.9

Sei Γ eine Gruppe von endlichem Typ. Γ heißt **hyperbolische Gruppe**, falls es ein endliches Erzeugendensystem S gibt, so dass der metrische Raum zu (Γ, S) — oder eben der Cayley–Graph zu (Γ, S) — ein hyperbolischer Raum ist.

Nach Satz 12.8 ist die Definition einer hyperbolischen Gruppe unabhängig von S.

Bemerkung:

Obwohl die Definition einer hyperbolischen Gruppe inspiriert ist durch die Definition hyperbolischer Mannigfaltigkeiten, so geht sie doch schon wegen der algebraischen Struktur über diese geometrische Motivation hinaus.

Die Fundamentalgruppen kompakter hyperbolischer Mannigfaltigkeiten sind hyperbolische Gruppen. Diese Fundamentalgruppen sind torsionsfrei — die universelle Überlagerung ist zusammenziehbar.

Auf der anderen Seite sind endliche Gruppen immer hyperbolisch — nehme einfach für die Rips–Konstante δ den maximalen Abstand im Cayley–Graph.

Also sind hyperbolische Gruppen nicht notwendig torsionsfrei. Aber: Hyperbolische Gruppen haben höchstens eine endliche Anzahl von Konjugationsklassen von Torsionselementen (vgl. Kapitel 15).

Die Theorie der hyperbolischen Gruppen ist geeignet für Burnside–Probleme: Bestimme die unendlichen Torsionsgruppen von endlichem Typ (vgl. [Lys]).