

# Inhaltsverzeichnis

Notation	XII
<b>1 Zur Geschichte des Zahlbegriffs</b>	<b>1</b>
1.1 Die ältere Geschichte . . . . .	2
1.2 Die Entwicklung des Dezimalsystems . . . . .	7
1.3 Die neuere Geschichte . . . . .	11
<b>2 Natürliche Zahlen und Rechenregeln</b>	<b>15</b>
2.1 Rechnen mit nichtnegativen Zahlen . . . . .	16
2.2 Folgerungen aus den Grundrechenregeln . . . . .	17
2.3 Potenzen mit natürlichen Exponenten . . . . .	20
2.4 Übungen . . . . .	22
<b>3 Reelle Zahlen und ihre Anordnung</b>	<b>23</b>
3.1 Reelle Zahlen als Dezimalfolgen . . . . .	24
3.2 Die Anordnung der Dezimalzahlen . . . . .	25
3.3 Der Satz von der oberen Grenze . . . . .	27
3.4 Lückenlosigkeit der reellen Zahlen . . . . .	30
3.5 Übungen . . . . .	31
<b>4 Arithmetik der abbrechenden Dezimalzahlen</b>	<b>33</b>
4.1 Rechnen mit endlichen Dezimalzahlen . . . . .	34
4.2 Nachweis der Grundrechenregeln . . . . .	36
4.3 Division endlicher Dezimalzahlen . . . . .	37

---

4.4	Übungen . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Arithmetik der reellen Zahlen</b>	<b>41</b>
5.1	Schlichte Folgen . . . . .	42
5.2	Erweiterung der Rechenoperationen . . . . .	43
5.3	Nachweis der Grundrechenregeln . . . . .	44
5.4	Rechnen mit Näherungen . . . . .	46
5.5	Übungen . . . . .	48
<b>6</b>	<b>Division und rationale Zahlen</b>	<b>49</b>
6.1	Division und Bruchrechnung . . . . .	50
6.2	Periodische Dezimalzahlen . . . . .	53
6.3	Stammbruchapproximation . . . . .	54
6.4	Übungen . . . . .	56
<b>7</b>	<b>Beginnende Analysis</b>	<b>57</b>
7.1	Unendliche Reihen . . . . .	58
7.2	Der Zwischenwertsatz und Anwendungen . . . . .	63
7.3	Potenzrechnung und Exponentialfunktion . . . . .	66
7.4	Logarithmen . . . . .	73
7.5	Übungen . . . . .	77
<b>8</b>	<b>Elementare Rechenverfahren</b>	<b>79</b>
8.1	Der Divisionsalgorithmus . . . . .	80
8.2	Der $g$ -adische Algorithmus . . . . .	84
8.3	Der CANTORSche Algorithmus . . . . .	88
8.4	Berechenbarkeit und Iteration . . . . .	92
8.5	Übungen . . . . .	97
<b>9</b>	<b>Negative und komplexe Zahlen</b>	<b>99</b>
9.1	Ringerweiterungen . . . . .	100
9.2	Konstruktion der Ringerweiterung . . . . .	103

---

9.3	Der Körper der reellen Zahlen . . . . .	107
9.4	Der Körper der komplexen Zahlen . . . . .	110
9.5	Rechnerinterne Implementierungen . . . . .	113
9.6	Übungen . . . . .	117
<b>10</b>	<b>Maßzahlen und Operatoren</b>	<b>119</b>
10.1	Größenbereiche . . . . .	120
10.2	Endliche Dezimalzahlen als Maßzahlen . . . . .	126
10.3	Reelle Maßzahlen und der Isomorphiesatz . . . . .	128
10.4	Größengruppen . . . . .	133
10.5	Axiomatisierungen des reellen Zahlkörpers . . . . .	136
10.6	Logarithmus als Isomorphismus . . . . .	137
10.7	Operatoren . . . . .	139
10.8	Größenprodukte . . . . .	143
10.9	Übungen . . . . .	146
<b>11</b>	<b>Die natürlichen Zahlen</b>	<b>147</b>
11.1	Zählreihen und Rekursion . . . . .	149
11.2	Eindeutigkeit und Existenz der Zählreihe . . . . .	153
11.3	Die Anordnung der Zählreihe . . . . .	155
11.4	Abzählungen endlicher Mengen . . . . .	158
11.5	Der kardinale und der ordinale Aspekt . . . . .	161
11.6	Arithmetik der natürlichen Zahlen . . . . .	163
11.7	Übungen . . . . .	165
	<b>Lösungen der Übungen</b>	<b>167</b>
	<b>Literatur</b>	<b>181</b>
	<b>Namens- und Sachverzeichnis</b>	<b>183</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>187</b>