Abschnitt 11

Ein Aufbau des Systems der natürlichen Zahlen

Beim Aufbau des Systems der reellen Zahlen in **3 – 5** sind wir davon ausgegangen, dass uns die natürlichen Zahlen uneingeschränkt zur Verfügung stehen. Mit einigen zusätzlichen (mengentheoretischen) Begriffen wie dem der Folge wurden sodann die reellen Zahlen konstruiert. Nun wird nachträglich dargelegt, wie sich das Konzept der natürlichen Zahl in den Rahmen der inzwischen klassischen Auffassung von Mathematik einordnet, nach der sich alle mathematischen Begriffe auf den Mengenbegriff reduzieren lassen. Dies war das Fazit des gegen Ende des 19. Jahrhunderts von G. FREGE (1848 - 1925), B. RUSSELL (1882 – 1970) u.a. unternommenen Versuches, die Mathematik oder zumindest ihre wesentlichen Teile, auf die Logik zu reduzieren (*Logizismus*). So weit zu gehen hat sich allerdings als unmöglich erwiesen, denn auch in der Mathematik kann man nicht erwarten, etwas für nichts zu erhalten.

Wir beginnen mit der Untersuchung der von R. DEDEKIND in [7] erstmals betrachteten Modellen des PEANOschen Axiomensystems, hier Zählreihen genannt. Eine Zählreihe dient vornehmlich dem Abzählen endlicher Mengen, und ihre Definition enthält genau die dazu erforderlichen Eigenschaften. Ihre Existenz wird mengentheoretisch gesichert. Die Elemente einer Zählreihe nennen wir kurzerhand *natürliche Zahlen*. Diese Definition ist weniger vieldeutig als es den Anschein hat. Alle Zählreihen erweisen sich nämlich als isomorph. Daher kann nach Abschluss einer Reihe von Betrachtungen einfach von *der* Zählreihe oder *der* Menge der natürlichen Zahlen gesprochen werden.

In Zählreihen ist nur von einem Anfangselement und einer Nachfolgerfunktion die Rede. Sowohl die übliche Anordnung der natürlichen Zahlen als auch die arithmetischen Operationen müssen also definiert und ihre wesentlichen Eigenschaften nachgewiesen werden. Eine der Definitionsmöglichkeiten der arithmetischen Operationen ist ihre in vielen Darstellungen wiederholte rekursive Einführung nach [7], siehe auch die Übungen. Wir wählen hier einen Weg, der die axiomatische Behandlung der Zählreihen mit den Vorteilen einer mengentheoretischen Definition der arithmetischen Operationen verbindet. Der in **11.6** vorgenommene Nachweis aller einschlägigen Rechengesetze, genauer, der Axiome in **2.1**, ist dann eine überaus einfache Aufgabe. Ein weiterer Vorteil dieser Methode ist, dass sie durchweg intuitiven Gegebenheiten folgt und nebenbei auch die Theorie endlicher Mengen mitbegründet. Insbesondere wird durch sie der Begriff des Zählens endlicher Mengen auf eine solide Grundlage gestellt.

Die mengentheoretische Vorgehensweise hat den Vorteil methodischer und konzeptioneller Klarheit. Man könnte jedoch auch anderen Konzeptionen folgen, z.B. einer solchen, welche die natürlichen oder die ganzen Zahlen als von vornherein gegeben und als Ursprung aller Mathematik ansieht. Diese Auffassungsweise wird sehr deutlich in dem berühmten Ausspruch L. Kroneckers (1823 – 1891): „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk."

Bei solcher Auffassung erübrigt sich ein Existenzbeweis für Zählreihen, weil es eine der Zahlentheorie übergeordnete Theorie gar nicht gibt. Diese Auffassung findet ihre Rechtfertigung u.a. darin, dass viele Schlussweisen und Begriffe, die man etwas voreilig zu den mengentheoretischen zu zählen geneigt ist, bei genauerem Hinsehen elementar-kombinatorischen Charakter haben. Sie lassen sich in einer formalisierten Zahlentheorie erster Stufe, der sogenannten Peano-Arithmetik begründen, in der die arithmetischen Grundoperationen von vornherein zur Verfügung stehen. Allerdings käme man damit in der höheren Analysis nicht sehr weit, es sei dann, man verlegt die erforderlichen mengentheoretischen Hilfsmittel in eine Zahlentheorie zweiter Stufe, zu deren Objekten auch Teilmengen natürlicher Zahlen gehören und in der reelle Zahlen durch gewisse Teilmengen natürlicher Zahlen kodiert werden. Leider vereinfacht das die mathematische Grundlagenproblematik nicht, weswegen wir diesen Weg nicht beschreiten.

Man möchte ohne Skrupel von der Menge aller messbaren Mengen reeller Zahlen, der Menge aller integrierbaren Funktionen usw. reden können und diese z.B. als Objekte eines metrischen Raumes näher untersuchen. Hierbei verwendet man nichtkonstruktive und infinitistische Methoden durchweg. Um den Gebrauch dieser Methoden gegen jede Kritik zu schützen, entwickelte Hilbert das in wesentlichen Punkten jedoch gescheiterte Programm einer finiten Begründung der Mathematik. Dieses wurde revidiert, aber trotz des Fortschritts hat sich die Grundlagenproblematik ihrer vielschichtigen Aspekte wegen nicht erledigt. Immerhin befindet sich die Mathematik diesbezüglich in einer vergleichsweise besseren Situation als die meisten andere Wissenschaften.

Die meisten Mathematiker sind sich darüber einig, dass eine im Kern mengentheoretische Fundierung der Analysis geboten oder gar unumgänglich ist. Daher macht es Sinn, hierin auch die natürlichen Zahlen einzubeziehen. Ähnlich wie der Begriff des DEDEKINDschen Schnitts ist auch derjenige der Dezimalfolge der Form nach ein mengentheoretischer. Allerdings ließe sich dieser, wie auch die meisten Begriffe dieses Abschnitts, bereits im Rahmen einer erheblich eingeschränkten Mengenlehre behandeln. Nur der Bequemlichkeit halber stellen wir uns im Folgenden auf den Boden der naiven Mengenlehre.

11.1 Zählreihen und Rekursion

Eine Zählung beginnt stets mit einem ersten Element und vollzieht sich schrittweise. Dieser schrittweise Charakter des Zählens lässt sich durch eine Funktion $n \mapsto n^+$ genauer beschreiben, welche einem Element n einer Zählreihe das nachfolgende Element n^+ zuordnet. Deswegen gleicht das anschauliche Bild einer Zählreihe der einer mit einem Anfangselement beginnenden, sich beliebig fortsetzenden Perlenkette, siehe Figur 13. Die Präzisierung dieses anschaulichen Bildes führt so zu einer in der folgenden Definition enthaltenden, modernen Ansprüchen genügenden Formulierung des PEANOschen Axiomensystems [1)].

Definition. Ein Bereich $(\mathbb{N}, {}^+, 0)$, bestehend aus einer Menge $\mathbb{N}$, einer Funktion ${}^+ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, genannt die *Nachfolgerfunktion*, sowie einem besonderen, hier mit 0 bezeichneten und zu $\mathbb{N}$ gehörenden Element, genannt das *Anfangselement*, heißt eine *Zählreihe*, wenn $(\mathbb{N}, {}^+, 0)$ die folgenden drei Axiome erfüllt:

(PI) $0 \neq n^+$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (PII) $m^+ = n^+ \;\Rightarrow\; m = n$, für alle $m, n \in \mathbb{N}$.

(PIII) Ist $M \subseteq \mathbb{N}$ und erfüllt M die beiden Bedingungen

(a) $0 \in M$, (b) $n \in M \;\Rightarrow\; n^+ \in M$, für alle n,

so ist $M = \mathbb{N}$.

Wir bezeichnen fortan eine Zählreihe und ihre Trägermenge mit dem gleichen Symbol $\mathbb{N}$. Missverständnisse werden daraus nicht erwachsen, zumal sich alle Zählreihen alsbald als isomorph erweisen werden. n^+ heißt der *Nachfolger* von n, und n der *Vorgänger* von n^+, wobei n, m, i, k nachfolgend nur Elemente von

[1)] Dieses stammt eigentlich von DEDEKIND, [7, §6]. Das hier angegebene ist dem DEDEKINDschen ähnlicher. PEANO benutzte für die Darstellung seiner Axiome einen speziellen Formalismus, welcher Missverständnisse bei der Wiedergabe der Axiome in der mathematischen Literatur verursachte. Einen sarkastischen Kommentar dazu gibt W. FELSCHER in [12, Bd.**1**, S.144] wo er schreibt „Freilich bietet überhaupt ein größerer Teil der Literatur über die natürlichen Zahlen und die vollständige Induktion den Aspekt einer Komödie der Irrungen".

$\mathbb{N}$ bezeichnen. Nach (PII) hat ein Element *höchstens* einen Vorgänger, und (PI) schließt die Existenz eines solchen für das Anfangselement aus. (PIII) heißt das *Induktionsaxiom*. Es sichert unter anderem, dass die Zählreihe keine überflüssigen, zum Zählen nicht benötigte Elemente enthält. Mit weiteren Anwendungen von (PIII) werden wir uns noch ausgiebig befassen. Der in Figur 13 schematisierte Anfang der Zählreihe wird in **11.3** induktiv definiert.

$$\mathbb{N}:\ \underbrace{\overset{0}{\bullet} \;\text{———}\; \overset{0^+}{\bullet} \;\text{———}\; \bullet\;\bullet\;\bullet \;\text{———}\; \overset{n}{\bullet}}_{A_n} \;\text{———}\; \overset{n^+}{\bullet} \;\text{———}\; \bullet \;\text{———}\; \bullet\;\bullet\;\bullet$$

Fig. 13 Die Zählreihe und deren Anfang $A_n = \{0, \cdots, n\}$

0 hat gemäß (PI) also keinen Vorgänger. Doch lässt sich an den Axiomen nicht sofort erkennen, dass 0 das einzige Element ohne Vorgänger ist, und ebensowenig, dass der Vorgänger von n, wenn er existiert, von n auch verschieden ist.

Beide Tatsachen lassen sich jedoch durch *(vollständige) Induktion* beweisen, d.h. durch geeignete Anwendung von (PIII). Derartige Beweise aus (PI) – (PIII) sind unabhängig von einer Existenzdiskussion; vielmehr betreffen sie ausschließlich die Struktur von Zählreihen. Wir beweisen die beiden im letzten Absatz erwähnten Behauptungen in einem Zuge, indem wir sie einschließen in die Aussage

($*$) Für alle $n \in \mathbb{N}$: $n = 0$ oder es gibt ein $m \neq n$ mit $m^+ = n$.

Zum Beweis sei $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 0 \text{ oder es gibt ein } m \neq n \text{ mit } m^+ = n\}$. Gewiß ist $0 \in M$. Zum Nachweis von (b) in (PIII) sei $n \in M$ (*Induktionsannahme*). Im Falle $n = 0$ hat n^+ sicher einen Vorgänger $\neq n^+$, nämlich 0, denn nach (PI) ist $0 \neq 0^+$, so dass $n^+ \in M$. Falls aber $n \neq 0$, so sei etwa $n = m^+$ mit $m \neq n$ gemäß Induktionsannahme. n^+ hat den Vorgänger n, und wegen $m \neq n$ ist nach (PII) gewiss $n = m^+ \neq n^+$. Daher hat auch n^+ einen Vorgänger $\neq n^+$ und gehört damit zu M. Nach (PIII) ist folglich $M = \mathbb{N}$, und ($*$) ist bewiesen.

Obwohl alle Zählreihen isomorph sind (Satz 11.2), gibt es keine verbindliche Konvention über die Bezeichnung ihres Anfangselements, außer dass es meist mit 0 oder mit 1 bezeichnet wird. Das liegt in der Natur der Sache. Für Abzählungen endlicher nichtleerer Mengen ist 0 eigentlich entbehrlich, weil Zählungen nichtleerer Mengen gewohnheitsgemäß mit 1 beginnen. Da man andererseits eine n-elementige Menge gern mit den ersten n natürlichen Zahlen abzählen möchte, müssten Zählungen mit 0 beginnen, wenn man 0 als natürliche Zahl ansieht.

Bemerkung 1. Hier liegt der eigentliche Grund für gefühlsmäßige Vorbehalte gegen die Bezeichnung von 0 als „natürliche“ Zahl. In der Mathematik beginnen Zählungen allerdings recht häufig auch mit 0. Man spricht etwa von den ersten n Primzahlen $p_0, \ldots, p_{n-1}$. Ob 0 in einem Zählvorgang verwendet wird oder nicht, ist einzig und allein eine Frage der Bequemlichkeit. Auch an gewissen Alltagsbeispielen lässt sich der gelegentlich praktische Nutzen von Zählungen unter Einschluss von 0 demonstrieren. Es wäre z.B. sicher von allgemeinem Vorteil, für die Bezeichnung der Halteposition eines Fahrstuhls im Erdgeschoss international das Symbol 0 zu verwenden. Man kann dem Bezeichnungsproblem Rechnung tragen, indem man das Anfangselement in den Axiomen nicht benennt, also (P1) ersetzt durch *Es gibt genau ein Element* $\neq n^+$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ und dieses Element *nachträglich* wunschgemäß benennt. Auch Bedingung (a) in (PIII) wäre entsprechend zu ändern. Das beträfe allerdings auch manche Details in nachfolgenden Ausführungen. Die Modelle des so veränderten Axiomensystems sind von der Gestalt $(\mathbb{N}, {}^+)$ und seien *Nachfolgerbereiche* genannt, siehe dazu Übung 9.

Da wir beabsichtigen, die natürlichen Zahlen im Folgenden nicht nur zum Zählen sondern auch als Anzahlmaße beliebiger endlicher Mengen zu verwenden, sei das Anfangselement einer Zählreihe $\mathbb{N}$ mit 0 bezeichnet, solange nichts anderes gesagt wird. 0 wird als Anzahlmaß der leeren Menge dienen. Unabhängig davon behält man im Übrigen die freie Entscheidung, ob man Zählungen nichtleerer Mengen mit 0 oder 1 beginnen lässt. Jedenfalls ist mit $\mathbb{N}$ offenbar auch $\mathbb{N}_+ := \mathbb{N} \backslash \{0\}$ eine Zählreihe, die *Zählreihe der positiven natürlichen Zahlen*. Denn $\mathbb{N}_+$ ist gegenüber der Operation $^+$ abgeschlossen (d.h. $n \in \mathbb{N}_+ \Rightarrow n^+ \in \mathbb{N}_+$) und hat das Anfangselement 1, weil dessen Vorgänger ja entfernt wurde. Im Peanoschen Axiomensystem ist das Konstantensymbol 0 dann durch 1 zu interpretieren. $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_+$ unterscheiden sich nach Satz 11.2 zwar nicht strukturell, weil aber $\mathbb{N}_+$ echte Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist, lassen sich $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}_+$ nicht ohne weiteres identifizieren. Allgemein ergibt sich aus den nachfolgenden Strukturuntersuchungen leicht, dass ein beliebiger Anfang einer Zählreihe einfach weggelassen werden kann, ohne die Struktur der Zählreihe (oder des Nachfolgerbereichs) dadurch zu zerstören.

Wegen seiner herausragenden Bedeutung beweisen wir zuerst den berühmten Rekursionssatz, auch Dedekind*scher Rechtfertigungssatz* genannt. Dieser Satz wird nicht selten als unmittelbar einsichtig erachtet und bleibt oft unerwähnt. So wurde der Satz bereits in Abschnitt **2** bei der Definition der Potenz verwendet. Solange man mit natürlichen Zahlen und Funktionen naiv umgeht, erwächst hieraus kein Problem. Sobald man aber die vorkommenden Begriffe in einer Theorie präzisiert, erfordern Aussagen, welche diese Begriffe enthalten, auch entsprechende Beweise. Die Theorie, in der sich die im Rekursionssatz vorkommenden Begriffe in natürlicher Weise präzisieren lassen, ist die Mengenlehre.

Das betrifft insbesondere den Begriff der Funktion, der im Rekursionssatz mehrfach erscheint. Funktionen sind nach mengentheoretischer Auffassung spezielle Mengen geordneter Paare. Der Satz führt kombinatorische Konstruktionen auf mengentheoretische zurück und besitzt wesentliche Verallgemeinerungen. Aus dieser Möglichkeit einer mengentheoretischen Reduktion sollte jedoch keine Religion gemacht werden. Man sollte sie angemessen bewerten; denn sie löst keine Grundlagenprobleme, sondern verlagert diese höchstens.

Satz 11.1 (Rekursionssatz für $\mathbb{N}$). *Es sei $\mathbb{N}$ eine Zählreihe, A eine Menge, $a \in A$ und $F : \mathbb{N} \times A \to A$ eine beliebig vorgegebene Funktion. Dann existiert eine und nur eine Funktion $f : \mathbb{N} \to A$ welche den beiden folgenden Gleichungen (den Rekursionsgleichungen) genügt*:

$$\text{(R)} \quad f0 = a \quad ; \quad fn^+ = F(n, fn), \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Die Eindeutigkeit ist gerade die Aussage von Satz 2.1. Also verbleibt der Existenzbeweis. Sei f der Durchschnitt aller Mengen $M \subseteq \mathbb{N} \times A$, die für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und $y \in A$ folgende Eigenschaften haben:

$$\text{(i)} \;\; (0, a) \in M \quad ; \quad \text{(ii)} \;\; (n, y) \in M \;\Rightarrow\; (n^+, F(n, y)) \in M.$$

Dann gelten (i) und (ii) offenbar auch für die Menge $M = f$. Wir beweisen nun nacheinander die Behauptungen (a) bis (c), von denen (c) die fragliche Existenzbehauptung sichert.

(a) $(0, y) \in f \;\Rightarrow\; y = a$, für alle $y \in A$.

Denn sei $(0, y) \in f$ und angenommen $y \neq a$, so dass $(0, a) \neq (0, y)$. Dann erfüllt auch $M := f \backslash \{(0, y)\}$ gewiss noch (i), und wegen $(0, y) \neq (n^+, F(n, y))$ auch (ii). Weil f die kleinste (i) und (ii) erfüllende Menge ist, gilt $f \subseteq f \backslash \{(0, y)\}$. Dies bedeutet aber nichts anderes als $(0, y) \notin f$. Damit wurde die Annahme $y \neq a$ zum Widerspruch geführt.

(b) $(n, y), (n^+, y') \in f \;\Rightarrow\; y' = F(n, y)$.

Denn sei $(n, y), (n^+, y') \in f$ und $y' \neq F(n, y)$. Dann gelten (i) und (ii) gewiss auch für $M := f \backslash \{(n^+, y')\}$. Also $f \subseteq f \backslash \{(n^+, y')\}$, und folglich $(n^+, y') \notin f$, was ein Widerspruch ist.

(c) f ist eine (R) erfüllende Funktion von $\mathbb{N}$ nach A.

Dies heißt nach Definition: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $y \in A$ mit $(n, y) \in f$. Das ist nach (i) und (a) sicher richtig für $n = 0$. Sei dies richtig für n und sei y dasjenige Element mit $(n, y) \in f$. Nach (ii) ist dann $(n^+, F(n, y)) \in f$; mehr noch, nach (b) gibt es auch nur genau ein y' mit $(n^+, y') \in f$, nämlich $y' = F(n, y)$. Bezeichnet man nun dasjenige y mit $(n, y) \in f$ wie üblich mit fn, so besagt (i) für $M = f$ nichts anderes als $f0 = a$, und (ii) besagt $y = fn \;\Rightarrow\; fn^+ = F(n, y)$. Dies aber ist äquivalent zu $fn^+ = F(n, fn)$. Damit wurde auch (c) vollständig bewiesen, was den Beweis des Satzes abschließt. ❑

Dieser Satz hat zahllose Anwendungen, von denen die erste und vielleicht eindruckvollste der im nächsten Teilabschnitt ausgeführte Beweis ist, dass es bis auf Isomorphie nur höchstens eine Zählreihe geben kann.

11.2 Eindeutigkeit und Existenz der Zählreihe

Wir zeigen in Satz 11.2 zuerst, dass es bis auf Isomorphie höchstens eine Zählreihe gibt. Beliebige Zählreihen $\mathbb{N}$ und $\hat{\mathbb{N}}$ sind damit strukturell ununterscheidbar. Figur 14 veranschaulicht den Isomorphismus f von $\mathbb{N}$ auf $\hat{\mathbb{N}}$. Dabei werden hier nur die Anfangselemente 0 von $\mathbb{N}$ und $\hat{0}$ von $\hat{\mathbb{N}}$ unterschiedlich bezeichnet. Aus der Gleichbezeichnung der beiden Nachfolgeroperationen erwachsen keine Missverständnisse. Die geordneten Paare, aus denen sich der mittels des Rekursionssatzes konstruierte Isomorphismus f zusammensetzt, werden in der Figur durch senkrechte Pfeile dargestellt.

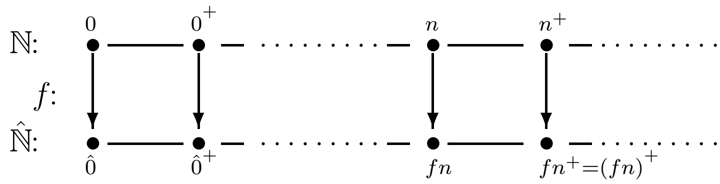

Fig. 14 Der Isomorphismus zwischen Zählreihen

Satz 11.2 (Isomorphiesatz). *Zählreihen* $\mathbb{N}$ *und* $\hat{\mathbb{N}}$ *mit den Anfangselementen* 0 *bzw.* $\hat{0}$ *sind isomorph, d.h. es gibt eine Bijektion* $f : \mathbb{N} \to \hat{\mathbb{N}}$ *mit* $f0 = \hat{0}$ *und* $fn^+ = (fn)^+$.

Beweis. Wir definieren $f : \mathbb{N} \to \hat{\mathbb{N}}$ mittels Satz 11.1 rekursiv durch die beiden folgenden Gleichungen, die zugleich die Isomorphiebedingungen für f darstellen:

$$f0 = \hat{0} \quad ; \quad f(n^+) = (fn)^+.$$

Es verbleibt also der Nachweis, f ist bijektiv. Sei die Abbildung $g : \hat{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ ganz wie f durch $g\hat{0} = 0$ und $g(n^+) = (gn)^+$ definiert. Dann gilt $g \cdot f = id_{\mathbb{N}}$. Denn es ist $g(f0) = g\hat{0} = 0$, und aus $g(fn) = n$ folgt $g(fn^+) = g((fn)^+) = (g(fn))^+ = n^+$. Aus Symmetriegründen gilt ebenso auch $f \cdot g = id_{\hat{\mathbb{N}}}$. Dies genügt zum Nachweis der Bijektivität von f. In der Tat, ist $fn = fm$, so folgt $n = g(fn) = g(fm) = m$. Also ist f injektiv. Ferner gilt $f(gm) = m$ für $m \in \hat{\mathbb{N}}$. Daher hat m bei der Abbildung f das Urbild gm und f ist folglich auch surjektiv. Insgesamt gesehen ist f also bijektiv. ❑

Nach den bisher gemachten Ausführungen ist eine Zählreihe strukturell zwar eindeutig bestimmt, doch fehlt offenbar ein rigoroser Existenzbeweis. Nun ist anschaulich zwar evident, dass z.B. eine Strichliste

$$| \quad || \quad ||| \quad |||| \qquad \dots$$

eine Zählreihe darstellt, wobei die Nachfolgeroperation das jeweilige Hinzufügen eines Striches zu einem Listenglied bedeutet. Wenn man aber den Versuch unternimmt, den anschaulichen Begriff einer Strichliste exakt zu erfassen, treten allerlei Schwierigkeiten zutage. Unsere beschränkte Anschauung über das Unendliche hat zu strengen Kriterien eines in sich geschlossenen Aufbaus der Mathematik geführt, in dem nach heutiger Sicht nur das als existent angesehen wird, was aufgrund mathematischer Konstruktionsprinzipien als existent nachgewiesen werden kann. Mit diesen Prinzipien lassen sich aller Erfahrung nach auch die kompliziertesten Erscheinungsbilder unserer Anschauung über die physikalische Welt modellieren, ganz sicher also ein so banales Beispiel wie eine Strichliste. Aber hat sich die Frage der Existenz einer Zählreihe mit dem Hinweis auf die Strichliste nicht schon erledigt?

Hier verbirgt sich leider wie häufig das Problem im Detail. Selbst wenn man philosophischen Konzeptionen folgt, welche das Anschauliche vor die gedankliche Abstraktion stellen, ist nicht sichergestellt, ob über die unbegrenzte Strichliste als ganzes überhaupt geredet werden darf, z.B. weil diese nicht vollständig herstellbar ist. Unsere Vorstellung überschreitet hier klar die Grenzen physikalischer Erfahrung. Es treten hierbei dieselben Probleme zutage, auf die in **10.1** im Zusammenhang mit der Betrachtung materieller Größenbereiche bereits aufmerksam gemacht wurde. Eine den Ansprüchen der Mathematiker genügende *Konstruktion* einer Zählreihe ist mit einem Hinweis auf die Strichliste nicht zu erbringen.

Die mengentheoretische Konstruktion einer Zählreihe ist hingegen recht einfach. Das liegt an der simplen Bauart des Begriffs, der nur die Grundeigenschaften des Zählens formalisiert und über Operationen wie Addition oder Multiplikation gar nicht redet. Eine raffinierte, inzwischen zum Standard gewordene Konstruktion dieser Art wurde 1925 von dem damals 22-jährigen Studenten J. v. NEUMANN (1903 – 1957) vorgeschlagen. Sie eignet sich gleichermaßen zur Konstruktion der transfiniten Zahlen und hat sich durchgesetzt, siehe etwa [9]. Die NEUMANNsche Zählreihe ω ist definiert als Durchschnitt aller Mengen Ω mit den Eigenschaften $\emptyset \in \Omega$, sowie $x \in \Omega \Rightarrow x \cup \{x\} \in \Omega$, für alle x. Dass es eine Menge mit diesen Eigenschaften überhaupt gibt, ist die heute übliche Formulierung des Unendlichkeitsaxioms. ω selbst hat diese Eigenschaften, wie man unmittelbar sieht. Folglich ist $0 := \emptyset \in \omega$, $0^+ := 0 \cup \{0\} = \{0\} \in \omega$, usw. $\emptyset$ ist Anfangselement von ω und $n^+ := n \cup \{n\}$ der gleichfalls zu ω gehörende Nachfolger von $n \in \omega$.

Die Gültigkeit der Axiome (PI) und (PIII) für ω ist unmittelbar klar. Nur bei (PII) muss man rechnen. Zuerst zeigt man induktiv über $n \in \omega$, dass n *transitiv* ist, was heißen soll $y \in x \in n \Rightarrow y \in n$, oder gleichwertig, jedes $x \in n$ ist zugleich Teilmenge von n. Dies ist trivial für $n = \emptyset$, und ist n transitiv, so auch $n \cup \{n\}$. Denn ist $x \in n \cup \{n\}$, etwa $x \in n$ und daher auch $x \subseteq n$, ist auch $x \subseteq n \cup \{n\}$; für $x = n$ ist ebenfalls $x \subseteq n \cup \{n\}$. Hieraus ergibt sich leicht (PII). Denn sei $n \cup \{n\} = m \cup \{m\}$ und etwa $n \neq m$. Dann ist $n \in m$ und $m \in n$. Weil n transitiv ist, folgt $n \in n$. Dies aber widerspricht dem induktiv beweisbaren Fakt $n \notin n$.

Denn gewiss ist $0 \notin 0$. Sei $n \notin n$ gemäß Induktionsannahme. Wäre $n^+ \in n^+$, ist entweder $n^+ = n$ was $n \notin n$ widerspricht, oder aber $n^+ \in n$, was wegen $n \in n^+$ und der Transitivität von n der Annahme $n \notin n$ ebenfalls widerspricht.

Wir haben damit insgesamt gezeigt, dass es bis auf Isomorphie genau eine Zählreihe $\mathbb{N}$ gibt. Es ist unnötig, über die Natur der Elemente von $\mathbb{N}$ Festlegungen zu treffen, weil wir nur von den Struktureigenschaften von $\mathbb{N}$ Gebrauch machen werden. Man darf also die v. NEUMANNsche Definition im Prinzip wieder vergessen. Sie diente hier lediglich dem Existenzbeweis von Zählreihen [2)]. Von nun an bezeichnen wir auch die Elemente von $\mathbb{N}$ in wohlbekannter Weise mit $0, 1, 2, \ldots$ Also $1 = 0^+$, $2 = 1^+$ usw.

11.3 Die Anordnung der Zählreihe

Jedermann hat die lineare Anordnung der Zählreihe gemäß der sukzessiven Erzeugung ihrer Elemente sichtbar vor Augen. Doch ist das Vorhandensein einer derartigen Ordnung exakt zu bestätigen, und dies ist weniger einfach, als man auf den ersten Blick vermuten würde. Selbst DEDEKIND, der den Mathematikern diese und ähnliche Beweisnotwendigkeiten zu Ausgang des 19. Jahrhunderts erst ins Bewusstsein rief, hat in [7] diese spezielle Aufgabe unterschätzt. Nicht nur die Auswahl von Eigenschaften der Zählreihe, die hier zum Erfolg führen, auch die Reihenfolge ihrer Beweise ist wichtig. Wir beginnen mit der Definition des Terms $\{0, \ldots, n\}$, den wir genau unter die Lupe nehmen werden.

Definition. Der von $n \in \mathbb{N}$ bestimmte *Anfang* $A_n \subseteq \mathbb{N}$ werde rekursiv erklärt durch $A_0 = \{0\}$, $A_{n^+} = A_n \cup \{n^+\}$. Der Anfang A_n wird auch mit $\{0, \ldots, n\}$ bezeichnet.

Demnach ist $A_1 = \{0, 1\}$, $A_2 = \{0, 1, 2\}$, usw. Figur 13 in **11.1** vermittelt eine anschauliche Vorstellung von dem durch $n \in \mathbb{N}$ bestimmten Anfang A_n. Es ist plausibel, dass A_n eine im naiven Sinne endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist. Aber dies kann erst dann wirklich bewiesen werden, wenn der Begriff *endlich* klar gefasst worden ist, was in **11.4** geschehen wird. Erst dann lässt sich bestätigen, dass $\mathbb{N}$ selbst unendlich ist.

Die Schreibweise $A_n = \{0, \ldots, n\}$ suggeriert natürlich $0 \in A_n$ und $n \in A_n$ und das ist auch so. Aber schon der Nachweis dieser simplen Fakten erfordert ein

[2)] Man könnte jedoch auch einen Schritt weitergehen und spezielle Eigenschaften von ω ausnutzen. Zum Beispiel lässt sich in ω der Mengenterm $\{0, \ldots, n\}$ ohne Umschweife als die Menge n^+ definieren, also etwa $\{0, 1\} = 1^+ = 2$. Auch die Anordnungskonstruktion in **11.3** ließe sich so etwas vereinfachen.

induktives Argument, ebenso wie der von $n^+ \notin A_n$ und fast allen übrigen im folgenden Lemma aufgelisteten Eigenschaften. Nur Beweise können zweifelsfrei bestätigen, dass präzise Definitionen das Gemeinte auch erfassen.

Lemma. *Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gelten*

(1) $0, n \in A_n$ (2) $m^+ \in A_n \;\Rightarrow\; m \in A_n$,
(3) $n^+ \notin A_n$, (4) $m \neq n \in A_m \;\Rightarrow\; n^+ \in A_m$,
(5) $A_n = A_m \Rightarrow n = m$, (6) $A_n \subset A_m \Rightarrow A_{n^+} \subseteq A_m$.

Beweis. (1): Induktion über n. Dies ist klar für $n = 0$. Ist $0 \in A_n$ so gilt sicher auch $0 \in A_{n^+}$, weil definitionsgemäß $A_n \subseteq A_{n^+}$, ebenso wie auch $n^+ \in A_{n^+}$.

(2): Induktion über n. Klar für $n = 0$, weil niemals $m^+ \in A_0 = \{0\}$ nach Axiom (P1). Sei $m^+ \in A_{n^+}$. Im Falle $m^+ \in A_n$ ist $m \in A_n \subseteq A_{n^+}$ gemäß Induktionsannahme. Falls aber $m^+ = n^+$, ist $m = n$, daher $m \in A_n \subseteq A_{n^+}$ wegen $n \in A_n$, also gleichwohl $m \in A_{n^+}$.

(3): Induktion über n. Es ist $0^+ \notin A_0 = \{0\}$, weil $0^+ \neq 0$. Sei $n^+ \notin A_n$. Dann ist auch $n^{++} \notin A_n$ – sonst wäre $n^+ \in A_n$ nach (2), entgegen Annahme. Weil auch $n^{++} \neq n^+$, folgt die Induktionsbehauptung $n^{++} \notin A_n \cup \{n^+\} = A_{n^+}$.

(4): Induktion über m. (4) ist trivial für $m = 0$, weil kein n mit $0 \neq n \in A_0 = \{0\}$ existiert. Induktionsschritt: $m^+ \neq n \in A_{m^+} = A_m \cup \{m^+\}$ impliziert $n \in A_m$. Daher ist entweder $m = n$ oder sonst $m \neq n \in A_m$ und damit $n^+ \in A_m$ nach Induktionsannahme. In beiden Fällen ist dann aber $n^+ \in A_m \cup \{m^+\} = A_{m^+}$.

(5): Sei $A_n = A_m$. Dann ist $n \in A_m$ und $n^+ \notin A_n = A_m$ nach (3). Daher $n = m$, denn wäre $m \neq n \;(\in A_m)$, ergibt sich nach (4) der Widerspruch $n^+ \in A_m = A_n$.

(6): Sei $A_n \subset A_m$. Um $A_{n^+} \subseteq A_m$ zu beweisen, genügt es, $n^+ \in A_m$ zu verifizieren. Wegen $A_n \subset A_m$ gilt $m \neq n \in A_n \subset A_m$ und daher $n^+ \in A_m$ nach (4). ❑

Man könnte A_n auch explizit definieren, und zwar als die kleinste Teilmenge von $\mathbb{N}$, die n enthält und mit jedem Element auch dessen Vorgänger, sofern ein solcher existiert. Dann müßte $A_{n^+} = A_n \cup \{n^+\}$ bewiesen werden, während z.B. auf (2) verzichtet werden kann. Aber wir halten uns mit einer Diskussion über die Vor- und Nachteile unterschiedlicher Definitionen nicht auf und kommen gleich zum Hauptresultat dieses Teilabschnitts.

Satz 11.3 (Anordnungssatz). *Es sei die Relation $<$ in $\mathbb{N}$ definiert durch $n < m \Leftrightarrow A_n \subset A_m$. Dann ist $<$ eine Anordnung der Zählreihe $\mathbb{N}$.*

Beweis. $<$ ist offenbar transitiv. Zum Beweis von $\vee$ (siehe **2.1**) beachte man, dass sich die Fälle $m < n$, $m = n$, $m > n$ nach Definition von $<$ gegenseitig ausschließen. Es genügt daher, $n \leq m$ oder $m \leq n$ zu zeigen, oder gleichwertig

$$(*) \quad \text{für alle } n, m\text{: } A_n \subseteq A_m \textit{ oder } A_m \subseteq A_n.$$

Die Gleichwertigkeit folgt aus $n \leq m \Leftrightarrow A_n \subseteq A_m$ und dies gilt, weil wegen (5)

$$n \leq m \;\Leftrightarrow\; n < m \text{ oder } n = m \;\Leftrightarrow\; A_n \subset A_m \text{ oder } A_n = A_m \;\Leftrightarrow\; A_n \subseteq A_m.$$

Wir beweisen $\mathbb{N} = M := \{n \in \mathbb{N} \,|\, A_n \subseteq A_m \textit{ oder } A_m \subseteq A_n, \textit{für alle } m\}$ induktiv über n, was dasselbe besagt wie $(*)$. Es ist $0 \in M$; denn wegen (1) gilt $A_0 \subseteq A_m$ für beliebiges m, erst recht also $A_0 \subseteq A_m$ oder $A_m \subseteq A_0$. Sei $n \in M$ gemäß Induktionsannahme, und daher $A_n \subset A_m$ oder $A_m \subseteq A_n$, für beliebiges m. Falls $A_n \subset A_m$, ist $A_{n^+} \subseteq A_m$ nach (6); falls aber $A_m \subseteq A_n$ ist $A_m \subseteq A_{n^+}$, denn $A_n \subseteq A_{n^+}$. Also $A_{n^+} \subseteq A_m$ oder $A_m \subseteq A_{n^+}$ in jedem Falle. Folglich ist auch $n^+ \in M$. Damit gilt $M = \mathbb{N}$ und der Satz ist bewiesen. ❑

Die so konstruierte Ordnung von $\mathbb{N}$ heißt die *natürliche*. Diese ist – unter unübersehbar vielen weiteren Anordnungsmöglichkeiten von $\mathbb{N}$ – nach Übung 1 eindeutig gekennzeichnet durch

(7) $\quad n < n^+$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Eigenschaft (7) gilt, weil $A_n \subseteq A_{n^+}$ und $n^+ \notin A_n$ nach (3), also $A_n \subset A_{n^+}$. Man vermerke, (6) lässt sich auch schreiben als $n < m \Rightarrow n^+ \leq m$, d.h. zwischen n und n^+ liegen keine Elemente. Das ergibt $n < m \;\Rightarrow\; n^+ < m^+$, und wegen der Vergleichbarkeit auch die Umkehrung hiervon. Wir erwähnen noch das nützliche

Korollar. $A_m = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq m\}$. *Insbesondere ist m größtes Element in A_m.*

Beweis. Es ist zu zeigen $n \leq m \Leftrightarrow n \in A_m$ (gleichwertig $A_n \subseteq A_m \Leftrightarrow n \in A_m$). Die Richtung $\Rightarrow$ ist wegen $n \in A_n$ trivial. Sei umgekehrt $n \in A_m$. Wäre $A_n \nsubseteq A_m$, so wäre $A_m \subset A_n$ nach Satz 11.3. Daher $m \neq n \in A_m$ und so $n^+ \in A_m \subseteq A_n$ nach (4), ein Widerspruch zu $n^+ \notin A_n$ gemäß (3). ❑

Bemerkung 2. Die obige Konstruktion der Anordnung ließe sich für die Zählreihe ω etwas vereinfachen, wenn $n < m$ in ω durch $n \in m$ definiert wird. Die auf ω beschränkte $\in$-Relation ist bereits die natürliche Anordnung von ω. Die Transitivität der Elemente $n \in \omega$ besagt insbesondere, dass $\in$ eine transitive Relation auf ω ist. Weniger einfach ist auch hier nur der Nachweis der Vergleichbarkeit.

Die natürliche Anordnung von $\mathbb{N}$ hat darüber hinaus zwei weitere, für zahlreiche Anwendungen wichtige Besonderheiten, nämlich

(8) jede nichtleere beschränkte Teilmenge von $\mathbb{N}$ hat ein größtes Element,

(9) jede nichtleere Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ hat ein kleinstes Element.

Zum Beweis von (8) vergegenwärtige man sich zuerst, dass jede nichtleere Teilmenge M von A_n ein größtes Element hat. Dies ist klar für $A_0 = \{0\}$. Ist $M \subseteq A_{n^+}$, so ist entweder $M \subseteq A_n$ und M hat ein größtes Element gemäß

Induktionsannahme – oder aber es ist $n^+ \in M$, in welchem Falle nach dem letzten Korollar n^+ größtes Element von M ist. Hieraus ergibt sich unmittelbar (8); denn ist $M \subseteq \mathbb{N}$ durch n beschränkt, so ist $M \subseteq A_n$ nach dem Korollar und hat damit ein größtes Element.

Von (9) spricht man als der *Wohlordnung* von $\mathbb{N}$. Allgemein heißt eine geordnete Menge *wohlgeordnet*, wenn jede ihrer nichtleeren Teilmengen ein kleinstes Element hat. Wir zeigen zuerst, jedes A_n ist wohlgeordnet. Das ist klar für A_0 und gilt dies für A_n so auch für A_{n^+}. Denn sei $\emptyset \neq M \subseteq A_{n^+}$. Der interessante Fall ist $M \cap A_n \neq \emptyset$. Diese Menge hat ein kleinstes Element nach Induktionsannahme, welches dann offenbar auch kleinstes Element in M ist. Daraus folgt sofort (9). Denn ist $n \in M \subseteq \mathbb{N}$, so hat $A_n \cap M$ ein kleinstes Element und dieses ist nach dem Korollar zugleich das kleinste Element von M.

(8) und (9) implizieren direkt, dass $(\mathbb{N}, <)$ diskret geordnet ist, d.h. jeder Schnitt ist ein Sprung. Denn ist (U, V) ein Schnitt von $\mathbb{N}$, so hat U nach (8) ein größtes, und V nach (9) ein kleinstes Element. Darüber hinaus ist $(\mathbb{N}, <)$ bis auf Isomorphie die einzige diskret geordnete Menge mit kleinstem und ohne größtes Element, Übung 5. Dies ist eine bekannte ordnungstheoretische Charakterisierung von $\mathbb{N}$.

11.4 Abzählungen endlicher Mengen

Es ist wohlbekannt, dass sich Mengen ohne zu zählen hinsichtlich ihrer Anzahl (oder wie man auch sagt, ihrer *Mächtigkeit*) vergleichen lassen. Historisch gesehen war es jedoch ein bedeutender Fortschritt, Mengen zu *zählen*, statt sie durch direkte Zuordnung ihrer Elemente hinsichtlich ihrer Anzahl zu vergleichen. Dieser Austausch von Informationen über Anzahlen ist eine entscheidende Voraussetzung für organisierte Arbeitsteilung.

Mit der Zählreihe zählt man im Regelfalle die Elemente nichtleerer Mengen. Das suggeriert, das erste Element der Zählreihe für die Zählung der Einermengen, den „kleinsten“ nichtleeren Mengen, zu verwenden. Es ist aber bequemer, das erste Element 0 der Zählreihe $\mathbb{N}$ als Anzahl der leeren Menge zu reservieren und Zählungen nichtleerer Mengen mit 1 zu beginnen. Das entspricht auch der traditionellen Zählweise. Wir bedienen uns hier also der Zählreihe $\mathbb{N}_+$ mit dem ersten Element 1. Der durch n (≥ 1) bestimmte Anfang von $\mathbb{N}_+$ ist genau wie für $\mathbb{N}$ definiert. Dieser sei deutlicher Unterscheidung wegen mit A_n^+ bezeichnet. Also $A_n^+ = \{1, \ldots, n\}$. Außerdem sei $A_0^+ := \emptyset$. Man sollte sich vergegenwärtigen, dass A_n ein Element mehr enthält als A_n^+. So ist $A_2 = \{0, 1, 2\}$ aber $A_2^+ = \{1, 2\}$.

Eine *Abzählung* von M $(\neq \emptyset)$ mittels $1, \ldots, n$ sei nun nichts anderes als eine Bijektion α von A_n^+ auf M. Etwas genauer: α heiße eine *Abzählung von M der*

Länge n. Wir schreiben α_i für $\alpha(i)$ und bezeichnen α auch durch $\langle\alpha_i\rangle_n$, als Kürzel für $\langle\alpha_i\rangle_{1\leq i\leq n}$. Ist $\alpha_i = a$, so heiße i auch die *Nummer* von a bei α. Man kann sich eine Abzählung von M veranschaulichen, indem man jedem $a \in M$ seine Nummer bildlich gesprochen „anheftet". Es ergibt sich so in natürlicher Weise folgende

Definition. Eine Menge M heißt *endlich*, wenn $M = \emptyset$ oder wenn es ein $n \in \mathbb{N}_+$ und eine Abzählung von M der Länge n gibt. Andernfalls heißt M *unendlich*.

Die Ausnahmerolle von $M = \emptyset$ in dieser Definition ist vermeidbar, indem man erklärt, $\langle\alpha_i\rangle_0 := \emptyset$ sei Abzählung von $M = \emptyset$ der Länge 0 (die „leere" Abzählung). $\emptyset$ hat demnach die Abzählungslänge 0. Alle Einermengen $\{a\}$ sind endlich, denn $1 \mapsto a$ ist Bijektion von A_1^+ auf $\{a\}$ und damit Abzählung von a der Länge 1. Zweiermengen $\{a, b\}$ (mit $a \neq b$) sind endlich, denn die Abbildung α mit $\alpha_1 = a$ und $\alpha_2 = b$ ist Abzählung von $\{a, b\}$ der Länge 2. Allgemein gilt: Ist $\alpha = \langle\alpha_i\rangle_n$ Abzählung von M und $a \notin M$, so ist $\langle\alpha_i\rangle_{n^+}$, die „Verlängerung" von α mit $\alpha_{n^+} = a$, eine Abzählung von $M \cup \{a\}$ der Länge n^+.

Bemerkung 3. Nach obiger Definition sind endliche Mengen genau diejenigen, die Abzählungen einer gewissen Länge n besitzen. Es gibt zahlreiche andere Endlichkeitsdefinitionen. Die einfachste stammt von DEDEKIND; sie benutzt den Begriff der natürlichen Zahl überhaupt nicht: M heißt endlich, wenn jede Injektion von M in sich bijektiv ist. Sehr plausibel ist auch die Definition, deren Korrektheit Übung 4 bestätigt: M heißt endlich, wenn M so geordnet werden kann, dass jede nichtleere Teilmenge von M ein kleinstes und ein größtes Element hat.

Für sehr große endliche Mengen M ist durchaus nicht von vornherein plausibel, dass verschiedene, zufällig gewählte Abzählungen von M von gleicher Länge sind. Das dies aber so ist, besagt folgender Satz, eines der eher seltenen Beispiele einer rein mathematischen Erklärung einer physikalischen Beobachtung.

Satz 11.4 (Zählsatz). *Sind $\langle\alpha_i\rangle_n$ und $\langle\beta_i\rangle_m$ Abzählungen von M, so ist $n = m$.*

Beweis durch Induktion über n. Die Behauptung ist klar für $n = 0$, denn die leere Menge und nur diese hat die Abzählungslänge 0. Sei die Behauptung für $n \in \mathbb{N}$ als richtig angenommen und $\alpha = \langle\alpha_i\rangle_{n^+}$ Abzählung einer Menge M der Länge n^+. Ist β eine andere Abzählung von M, so hat β jedenfalls nicht die Länge 0, also $\beta = \langle\beta_i\rangle_{m^+}$ für ein gewisses $m \in \mathbb{N}$. Es ist $m^+ = n^+$ zu beweisen. Betrachten wir zunächst den Fall, dass $\alpha_{n^+} = \beta_{m^+}$ und sei $a := \alpha_{n^+}$ $(= \beta_{m^+})$. Dann sind $\langle\alpha_i\rangle_n$ und $\langle\beta_i\rangle_m$ Abzählungen von $M\backslash\{a\}$. Daher ist $m = n$ gemäß Induktionsannahme, also auch $m^+ = n^+$. Der allgemeine Fall wird nun auf diesen Spezialfall zurückgeführt. Sei $a := \alpha_{n^+} = \beta_k$ und $b := \beta_{m^+}$. Es entstehe β' aus β durch Vertauschen der Nummern von a und b, d.h. es sei $\beta'_{m^+} = a$, $\beta'_k = b$ und $\beta'_i = \beta_i$ sonst. β' ist Abzählung von M derselben Länge wie β und hat nach dem Sonderfall dieselbe Länge wie α. Damit haben auch α und β dieselbe Länge. ❏

Unter der mit $|M|$ bezeichneten *Anzahl* oder *Kardinalzahl* einer endlichen Menge M versteht man die nach Satz 11.4 eindeutig bestimmte Länge einer Abzählung von M. Speziell ist also $|\emptyset| = 0$. Eines der Hauptergebnisse der allgemeinen Mengenlehre ist die Einsicht, dass auch unendlichen Mengen eine Kardinalzahl sinnvoll zugeordnet werden kann. Obwohl wir in **11.5** noch etwas mehr hierüber sagen, genügt es für unsere Zwecke, sich auf endliche Mengen zu beschränken. Ist $|M| = n$, so heißt M auch *n-zahlig*. Die Einermengen sind einzahlig, die Zweiermengen zweizahlig usw. Zu jedem noch so großen n (> 0) gibt es eine n-zahlige Menge. Zum Beispiel ist $|A_n^+| = n$, denn die identische Abbildung von A_n^+ ist Abzählung von A_n^+ der Länge n, während $|A_n| = |A_n^+ \cup \{0\}| = n^+$.

Mengen M, N heißen *gleichmächtig*, symbolisch $M \sim N$, falls eine Bijektion von M auf N existiert. Für endliche M, N ist dies gleichwertig zu $|M| = |N|$, also $|M| = |N| \;\Leftrightarrow\; M \sim N$. Denn sind α, β Abzählungen von M bzw. N gleicher Länge, so ist $\varphi = \beta{\cdot}\alpha^{-1}$ eine Bijektion von M auf N, wie die nebenstehende Figur verdeutlicht. Umgekehrt liefern eine Abzählung α von M zusammen mit einer Bijektion $\varphi\colon M \to N$ die Abzählung $\beta = \varphi{\cdot}\alpha$ von N. Auch für unendliche Mengen erfordert die Gleichmächtigkeitsdefinition keinen Zahlbegriff. Dieser kommt erst ins Spiel, wenn ein *Maß* für den Umfang einer Menge benötigt wird.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, "\alpha^{-1}"] \arrow[dd, "\varphi"'] & \\
& A_n^+ \arrow[dl, "\beta"] \\
N &
\end{tikzcd}$$

Was endliche Mengen angeht, so sind neben dem Zählsatz die beiden folgenden Sätze für eine mit der Anschauung konforme Erklärung der arithmetischen Operationen wichtig.

Satz 11.5. *Mit M ist auch jede echte Teilmenge $U \subset M$ endlich und es ist immer $|U| < |M|$, also niemals $U \sim M$.*

Beweis durch Induktion über $n = |M|$. Für $n = 0$ (also $M = \emptyset$) ist die Behauptung klar. Sei diese für alle n-zahligen Mengen vorausgesetzt, $\langle\alpha_i\rangle_{n^+}$ Abzählung von M der Länge n^+ und $a := a_{n^+}$. Dann ist $\langle\alpha_i\rangle_n$ Abzählung von $M^- := M\backslash\{a\}$, also $|M^-| = n$. **Fall 1:** $U \subseteq M^-$. Gemäß Induktionsannahme ist U endlich und darüber hinaus gilt $|U| \leq n < n^+$. **Fall 2:** $a \in U$. Dann ist $U^- := U\backslash\{a\} \subset M^-$. Also ist U^- endlich und damit auch $U = U^- \cup \{a\}$. Ferner ist $|U^-| < n$ nach Induktionsannahme, folglich $|U| = |U^-|^+ < n^+$. ❑

Ist also $U \subseteq M$ und $U \sim M$ (d.h. $|U| = |M|$), kann U nicht echte Teilmenge von M sein, also kann nur $U = M$ gelten. Zugleich wurde damit gezeigt, dass jede Injektion von M in sich bijektiv ist. Diese Eigenschaften gehen für unendliche Mengen M verloren. Es kann für echte Teilmengen $U \subset M$ durchaus $U \sim M$ gelten, wie das Beispiel von $\mathbb{N}$ zeigt. ${}^+\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}_+$ ist eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}_+$, obwohl $\mathbb{N}_+$ echte Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist. Erwartungsgemäß gilt auch

Satz 11.6. *Sind M, N endlich, so auch $M \cup N$. Dasselbe gilt für $M \times N$.*

Beweis durch Induktion über $n = |N|$. Für $n = 0$ ist dies klar, weil $M \cup \emptyset = M$. Sei nun $\langle \alpha_i \rangle_{n^+}$ Abzählung von N und $a := \alpha_{n^+}$, sowie $N^- = N \backslash \{a\}$. Dann ist N^- n-zahlig und $M \cup N^-$ nach Induktionsannahme endlich. Dann gilt aber dasselbe auch für

$$M \cup N = M \cup (N^- \cup \{a\}) = (M \cup N^-) \cup \{a\}.$$

Die Endlichkeit von $M \times N$ folgt analog. Für $n = 0$ ist $M \times N$ leer. Sonst sei $a \in N$ wie oben, $N^- := N \backslash \{a\}$, so dass $M \times N^-$ gemäß Induktionsannahme endlich ist. Dasselbe gilt wegen $M \sim M \times \{a\}$ nach dem bereits Bewiesenen dann auch für $M \times N$, denn

$$M \times N = M \times (N^- \cup \{a\}) = (M \times N^-) \cup (M \times \{a\}). \quad ❑$$

11.5 Der kardinale und der ordinale Aspekt

Die in **11.4** ausführlich dargelegte Rolle der natürlichen Zahlen als Anzahlmaße endlicher Mengen sei als ihr *kardinaler Aspekt* bezeichnet, und zwar im Unterschied zu ihrem *ordinalen Aspekt*, der sich wie folgt beschreiben lässt:

Jede Abzählung α einer nichtleeren n-elementigen Menge M induziert auf natürliche Weise eine mit $<_\alpha$ bezeichnete Anordnung von M, indem man erklärt

$$\alpha_i <_\alpha \alpha_j \;:\Leftrightarrow\; i < j \qquad (i, j \in \{1, \dots, n\}).$$

Mehr noch, *jede* Anordnung $<$ von M $(\neq \emptyset)$ rührt her von einer Abzählung α von M, ist also mit $<_\alpha$ für geeignetes α identisch (Übung 3). Auch $M = \emptyset$ lässt sich hier mit einbeziehen, wenn man vereinbart, die leere Menge geordneter Paare eine „Anordnung“ von $\emptyset$ zu nennen und diese mit $<_\emptyset$ zu bezeichnen.

Der Beweis von $< \,=\, <_\alpha$ für geeignetes α benutzt wesentlich, dass die Menge M im nichtleeren Falle bezüglich einer beliebig vorgegebenen Anordnung ein größtes Element besitzt. Dies ist induktiv über die Anzahl der Elemente von M leicht nachweisbar, beginnend mit dem Trivialfall $|M| = 1$.

Die Art der Abzählung ist gewiss ohne Bedeutung, wenn es nur um die bloße Feststellung der Anzahl geht. Andererseits können bestimmte Abzählungen in bestimmten Zusammenhängen relevant sein, etwa die Abzählung der Waggons eines Reisezuges, sagen wir von vorn nach hinten. Je nach dem Grad der Relevanz tritt der ordinale Aspekt der natürlichen Zahlen mehr oder weniger deutlich in den Vordergrund. Dieser Doppelaspekt der natürlichen Zahlen manifestiert sich in mehr oder weniger deutlich unterschiedenen Namen für natürliche Zahlen in ihrem kardinalen oder ordinalen Gebrauch. Im Deutschen gibt es eine wortstämmige

Unterscheidung nur für 1, die *Eins*, das *Erste*; in den romanischen und slawischen Sprachen z.B. ist diese Unterscheidung auch noch für 2 klar ausgeprägt (etwa dwa=zwei und drugy=zweite im Polnischen). Die sprachliche Angleichung ab 3 ist ein Indiz dafür, dass sich die Erkenntnis, wonach der kardinale und ordinale Gebrauch der Zahlen nur unterschiedliche Aspekte derselben Sache sind, frühzeitig im menschlichen Bewusstsein manifestiert hat.

Dass neben den natürlichen Zahlen weitere endliche Ordinalzahlen nicht erforderlich sind, liegt daran, dass eine endliche Menge M im wesentlichen auf nur eine Weise geordnet werden kann. Genauer, $(M, <)$ und $(M, <')$ sind isomorph, wie immer die Anordnungen $<$ und $<'$ beschaffen sind. Denn sei $< \, = \, <_\alpha$ und $<' \, = \, <_\beta$ (siehe oben). Nach dem Zählsatz sind α und β gleichlang, und deshalb ist $\alpha_i \mapsto \beta_i$ ein Isomorphismus. Damit sind $(M, <)$ und $(N, <')$ auch dann isomorph, wenn nur $M \sim N$.

Lange vor Cantor war den Mathematikern klar, dass sich diese Verhältnisse bei dem Versuch, das Unendliche zu durchdringen und auch unendliche Mengen sinnvoll zu zählen, vollständig verändern. Erst Cantor hat, in Deutschland im wesentlichen nur unterstützt von Dedekind, diese Aufgabe konsequent in Angriff genommen. Von Cantor stammen die Begriffe der transfiniten Kardinal- und Ordinalzahlen, die jeweils für sich sinnvolle Verallgemeinerungen der natürlichen Zahlen darstellen.

Beide Arten von Zahlen müssen aber deutlich voneinander unterschieden werden. Eine unendliche Menge M hat, wie Cantor bewies, überabzählbar viele paarweise nichtisomorphe Wohlordnungen und jede dieser Wohlordnungen entspricht einer speziellen ordinalen Abzählung von M. Zum Beispiel kann man $\mathbb{N}$ auch wohlordnen, indem man erklärt $n < 0$ für alle $n \neq 0$, also willkürlich $1 < 2 < 3 < \ldots < 0$ setzt. Bezüglich dieser Wohlordnung wäre 1 das kleinste, 0 jedoch das größte Element. Die zur Standard-Wohlordnung von $\mathbb{N}$ gehörende Ordinalzahl pflegt man mit ω zu bezeichnen, und die Ordinalzahl der soeben künstlich konstruierten Wohlordnung mit $\omega + 1$.

Lediglich die Kardinalzahl $|M|$ von M ist durch M selbst eindeutig bestimmt. Man definiert diese so, dass $|M| = |N| \;\Leftrightarrow\; M \sim N$, und erhält so ein vielfach nützliches Maß auch für den Umfang unendlicher Mengen. Auch die transfiniten Kardinalzahlen lassen sich in natürlicher Weise ordnen und sogar wohlordnen. Deren kleinste ist die mit $\aleph_0$ bezeichnete Kardinalzahl der *abzählbaren* (unendlichen) Mengen, also $|\mathbb{N}| = \aleph_0$. Leider weiß man nicht, welchen Platz $|\mathbb{R}|$ in dieser Ordnung einnimmt. Schlimmer noch, die zu Beginn des 20. Jahrhunderts formulierten und allgemein akzeptierten mengentheoretischen Axiome lassen nachweislich keine Entscheidung über diese Frage zu. Im Wesentlichen weiß man nur, was Cantor schon wußte, nämlich dass $\mathbb{R}$ *überabzählbar* ist, also $|\mathbb{R}| > \aleph_0$.

11.6 Arithmetik der natürlichen Zahlen

Wir definieren nun Summe und Produkt natürlicher Zahlen und erbringen den in unserem Aufbau des Zahlensystems noch fehlenden Nachweis, dass $\mathbb{N}$ mit diesen Operationen und der natürlichen Anordnung einen $\mathcal{E}$-Bereich bildet.

Definition. Die *Summe* $m + n$ der Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ sei erklärt als $|M \cup N|$, wobei M, N disjunkte Mengen sind mit $|M| = m$ und $|N| = n$.

Diese Erklärung ist sinnvoll. Denn wegen Satz 11.6 ist $M \cup N$ wieder endlich und nach Satz 11.4 ist die Erklärung unabhängig von der Wahl von M und N. Man hat sich zudem davon zu überzeugen, dass für zwei gegebene Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ disjunkte Mengen M, N mit $|M| = m$ und $|N| = n$ auch wirklich existieren. Für $m = 0$ oder $n = 0$ ist dies klar und es ist $0+n = n$ und $m+0 = m$. Für $m, n \in \mathbb{N}_+$ wähle man $M = \{(i, 0) \mid i \in A_m^+\}$ und $N = \{(i, 1) \mid i \in A_n^+\}$. Dann ist $|M| = m$, $|N| = n$ und $M \cap N = \emptyset$ wie verlangt. Mit der Wahl $M = \{1, \ldots n\}$ und $N = n^+$ erkennt man übrigens sofort $n^+ = n + 1$.

Aus der Erklärung der Addition ergeben sich unmittelbar die Axiome N^+, K^+, A^+ aus Abschnitt **2**. Zum Beispiel gilt $m+n = n+m$, weil $M \cup N = N \cup M$, für beliebige Mengen M, N. Auch verifiziert man leicht Axiom E: Sei $m + k = n$ für $k \neq 0$, sowie $m = |M|$, $k = |K|$ und $M \cap K = \emptyset$. Dann ist $n = |M \cup K|$ und somit $m < n$ nach Satz 11.5, weil M echte Teilmenge ist von $M \cup K$. Umgekehrt ergibt sich ein $k \neq 0$ mit $m+k = n$ für den Fall $m < n$ als $k := |A_n^+ \backslash A_m^+|$. Fast scheint es, als ließen sich die arithmetischen Gesetze rein logisch begründen; genau hier liegt die Wurzel des zu Beginn dieses Abschnitts erwähnten FREGEschen Logizismus.

Die Multiplikation führt man auf natürliche Weise über das Kreuzprodukt ein.

Definition. Das Produkt $m \cdot n$ der Zahlen m, n sei erklärt als $|M \times N|$, wobei M, N (nicht notwendig disjunkte) Mengen sind mit $|M| = m$ und $|N| = n$.

Aus entsprechenden Eigenschaften des Kreuzproduktes ergeben sich unmittelbar die Eigenschaften $\mathsf{N}^\times$, $\mathsf{K}^\times$, $\mathsf{A}^\times$, F und auch D. Die Beweise sind so einfach, dass wir sie übergehen können. Für $\mathsf{K}^\times$ zum Beispiel beachte man, dass eine natürliche Bijektion zwischen $|M \times N|$ und $|N \times M|$ besteht, indem man dem geordneten Paar $(a, b) \in M \times N$ das Paar $(b, a) \in N \times M$ zuordnet. Folglich sind beide Mengen gleichzahlig.

Damit sind wir jetzt dort angelangt, wo wir in Abschnitt **2** begonnen haben. Es ist der Faden geknüpft, der von den Mengen über die natürlichen zu den reellen Zahlen und zur Analysis führt. Wir wollen aber den folgenden Satz nicht übergehen, auf dem für den Fall $g = 10$ die für unsere Konstruktionen wesentlichen elementaren Rechenalgorithmen mit natürlichen Zahlen beruhen.

Satz 11.7 (über die g-adische Darstellung natürlicher Zahlen). *Sei $g \in \mathbb{N}$ und $g \geq 2$. Dann gibt es zu jedem positiven k eindeutig bestimmte natürliche Zahlen n und $z_0, \ldots, z_n < g$ mit $z_0 \neq 0$ derart, dass*

(10) $k = \sum_{i \leq n} z_i g^{n-i} \quad (= z_0 g^n + \ldots + z_{n-1} g + z_n)$.

Beweis. Existenz: Die Behauptung ist richtig für $1 \leq k < g$, mit $n = 0$ und $z_0 = k$. Sei nun $k \geq g$ und die Behauptung für alle positiven Zahlen $< k$ als richtig angenommen [3)]. Nach dem Satz von der Division mit Rest (Übung 6) ist

$(*) \quad k = q \cdot g + r$ für gewisse $q, r \in \mathbb{N}$ mit $r < g$.

Weil $k \geq g$, ist $q \neq 0$. Deshalb und wegen $1 < g$ ist $q < qg \leq qg + r = k$. Also gibt es nach Induktionsannahme eine Darstellung $q = \sum_{i \leq n} z_i g^{n-i}$ für gewisses n und gewisse $z_0, \ldots, z_n$ mit $z_0 \neq 0$. Dies und $(*)$ ergeben mit $z_{n+1} := r$

$$k = (z_0 g^n + \ldots + z_n) g + r = z_0 g^{n+1} + \ldots + z_n g + z_{n+1},$$

also eine Darstellung (10) auch für die Zahl k. Nun zu deren Eindeutigkeit. Es sei $k = z'_0 g^m + \ldots + z'_{m-1} g + z'_m$ eine weitere Darstellung von k, also

$$k = z_0 g^m + \ldots + z_{n-1} g + z_n = z'_0 g^m + \ldots + z'_{m-1} g + z'_m.$$

Division mit Rest von k durch g ergibt wegen der Eindeutigkeit des Restes offenbar $z_n = z'_m$ und damit $z_0 g^n + \ldots + z_{n-1} g = z'_0 g^m + \ldots + z'_{m-1} g$. Division dieser Gleichung durch g ergibt sowohl $n = m$ als auch die Behauptung $z_i = z'_i$ für alle $i < n$, weil dies gerade die Induktionsvoraussetzung der Eindeutigkeit der g-adischen Darstellung kleinerer Zahlen beinhaltet. ❏

In der Darstellung (10) heißen $z_0, \ldots, z_n$ (genauer, deren Symbole) auch die *g-adischen Ziffern* von k und man schreibt k meistens in der Weise $(z_0 z_1 \cdots z_n)_g$. Der Beweis des Satzes liefert offenbar ein Verfahren zur schrittweisen Berechnung der g-adischen Ziffern mittels Division mit Rest (ein bequemeres Verfahren, der g-adische Divisionsalgorithmus, wird in **8.2** behandelt). So ergibt sich für $g = 8$ zum Beispiel für das Jahr 2000 im Oktalsystem die klanglose Jahreszahl

$$2000 = 250 \cdot 8 = (31 \cdot 8 + 2) \cdot 8 \;\; = (3 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8 + 2) \cdot 8 = 3720_8.$$

Zum Abschluss präsentieren wir hier eine *modifizierte g-adische Darstellung* der natürlichen Zahlen ≥ 1, in der die Ziffer 0 nicht, dafür aber eine Ziffer für g benötigt wird. Eine Bezeichnung fehlt dann zunächst nur für die 0 selbst. Aber das ist unerheblich. Abgesehen davon, dass die 0 oft nicht zu den natürlichen Zahlen gerechnet wird, hindert uns nichts daran, das bisherige 0-Symbol zur Bezeichnung der Zahl Null beizubehalten. Wir läutern die fragliche Darstellung im Anschluß

[3)] Wir verwenden hier eine Form der vollständigen Induktion, die sich aufgrund der in **11.3** nachgewiesenen Wohlordnung von $\mathbb{N}$ leicht rechtfertigen lässt, Übung 2.

an unseren letzten Satz anhand der modifizierten Dezimaldarstellung, die durch Hinzufügen einer neuen Dezimalziffer für $g = 10$ zustande kommt.

Satz 11.8 *Sei $g \in \mathbb{N}_+$. Dann gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}_+$ eindeutig bestimmte natürliche Zahlen n und z_i für $i = 0, \dots, n$ mit $1 \leq z_i \leq g$ und $k = \sum_{i \leq n} z_i g^{n-i}$.*

Beweis. Die Existenzbehauptung folgt mit geringfügiger Modifikation fast genauso wie in Satz 11.7: Die Behauptung trifft zu auf $1 \leq k \leq g$, mit $n = 0$ und $z_0 = k$. Sei nun $k > g$ und die Behauptung für alle positiven Zahlen $< k$ als richtig angenommen. Nach dem Satz von der modifizierten Division mit Rest (Übung 7) ist $k = q \cdot g + r$ für gewisse $q, r \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq r \leq g$. Weil $k > g$, ist $q \neq 0$. Ferner ist $q < k$, weil $q \leq qg < qg + r = k$. Also ist die Induktionsannahme auf q anwendbar. Aus einer Darstellung $q = \sum_{i \leq n} z_i g^{n-i}$ gewinnt man nun analog wie im Beweis von Satz 10.7 eine solche für k. Auch der Nachweis der Eindeutigkeit verläuft analog zum Beweis von Satz 11.7. ❑

Man beachte, in Satz 11.8 ist, anders als in Satz 11.7, auch $g = 1$ erlaubt; man erhält so die „Strichlistendarstellung“ in **11.2** mit nur einer Ziffer, die wir uns durch den Strich repräsentiert denken.

Mit einer zusätzlichen Ziffer für $g = 10$ (etwa 𝟘) ergibt sich eine *modifizierte* dezimale Darstellung. Diese ist sogar ökonomischer als die klassische. Die ersten 110 positiven Zahlen haben in dieser Darstellung eine Ziffernlänge von höchstens 2. In der ersten Zeile der folgenden Tabelle sind die ersten 111 positiven Zahlen in normaler, in der zweiten Zeile in der modifizierten Dezimaldarstellung angegeben.

1	…	9	10	11	…	19	20	21	…	99	100	101	…	110	111	…
1	…	9	𝟘	11	…	19	1𝟘	21	…	99	9𝟘	𝟘1	…	𝟘𝟘	111	…

11.7 Übungen

1. Man zeige: die natürliche ist die einzige Anordnung von $\mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $n < n^+$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Man rechtfertige die folgende, z.B. im Beweis von Satz 11.7 verwendete Variante der vollständigen Induktion (die sogenannte $<$-Induktion): *Sei M eine Menge natürlicher Zahlen derart, dass für alle m: wenn $k \in M$ für alle $k < m$, ist auch $m \in M$. Dann ist $M = \mathbb{N}$* [4)].

3. Sei M endlich und geordnet durch $<$. Man zeige, $< = <_\alpha$ für eine geeignete Abzählung α von M. Abzählungen und Ordnungen entsprechen einander.

[4)] Man beachte, dass die Voraussetzung auch die Gültigkeit von $0 \in M$ sichert, denn $k \in M$ für alle $k < 0$ gilt trivialerweise, weil es keine natürlichen Zahlen $k < 0$ gibt.

4. Man beweise, eine Menge M ist endlich genau dann, wenn eine Anordnung von M existiert, bei der jede nichtleere Teilmenge von M ein kleinstes und ein größtes Element besitzt. Dies liefert eine weitere anschauliche Definition endlicher Mengen. Tatsächlich ist für endliches M jede Anordnung von M von der angegebenen Art.

5. Man zeige: $(\mathbb{N}, <)$ ist bis auf Isomorphie die einzige diskret geordnete Menge mit kleinstem und ohne größtes Element. Ferner zeige man: $(\mathbb{Z}, <)$ ist bis auf Isomorphie die einzige derartige Menge ohne kleinstes und größtes Element.

6. Man beweise den **Satz von der Division mit Rest:** *Zu jedem Paar von Zahlen $g, k \in \mathbb{N}$ mit $g \geq 2$ gibt es genau ein Paar $q, r \in \mathbb{N}$ mit $k = q \cdot g + r$ und $r < g$.*

7. Man beweise den **Satz von der modifizierten Division mit Rest**: *Zu jedem Paar $g, k \in \mathbb{N}_+$ gibt es genau ein Paar $q, r \in \mathbb{N}$ mit $k = gq + r$ und $1 \leq r \leq g$.*

8. Sei $\mathbb{N}$ die Zählreihe, $m \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt, und die Funktion $f_m : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gemäß Rekursionssatz definiert durch
$$f_m 0 = m \quad ; \quad f_m(n^+) = (f_m n)^+.$$
Etwas weniger pedantisch darf man diese Gleichungen auch als $m + 0 = m$ und $m + n^+ = (m + n)^+$ notieren. Man erkläre $m + n := f_m n$ und beweise auf der Grundlage dieser Definition das Assoziativgesetz A^+ und das Kommutativgesetz K^+. Analoges lässt sich für die Multiplikation beweisen, mit $m \cdot n := g_m n$; dabei sei g_m definiert durch $g_m 0 = 0$, $g_m(n^+) = g_m n + m$. Dies sind die von Dedekind in [6] gewählten rekursiven Reduktionen der arithmetischen Grundoperationen auf die Nachfolgerfunktion, die u.a. auch den Darstellungen [21] und [26] zugrundeliegen.

9. Eine weitere Definitionsmöglichkeit der arithmetischen Operationen auf $\mathbb{N}$ ist diese: Man verstehe $\mathbb{N}$ als Nachfolgerbereich (Bemerkung 1). Es gilt dann (1): Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ gibt es genau eine Abbildung η_m von $(\mathbb{N}, {}^+)$ in sich mit $\eta_m 0 = m$ und $\eta_m(n^+) = (\eta_m n)^+$, wobei 0 das Element von $\mathbb{N}$ ohne Vorgänger bezeichnet. η_m ist sogar eine Einbettung [5)]. Definiert man $m + n := \eta_m n$, so ist $(\mathbb{N}, +)$ eine kommutative Halbgruppe und $+$ ist identisch mit der üblichen Addition. Ferner zeigt sich (2): Zu jedem $m \in \mathbb{N}_+$ gibt es eine Einbettung ξ_m von $(\mathbb{N}, +)$ in sich mit $\xi_m 1 = m$. Die Multiplikation kann dann definiert werden durch $m \cdot n := \xi_m n$ für $m \in \mathbb{N}_+$ und $m \cdot n = 0$ sonst. Man beweise (1) vollständig und skizziere den Beweis von (2).

[5)] Dies wäre so nicht richtig, würde man $\mathbb{N}$ als Zählreihe $(\mathbb{N}, 0, +)$ verstehen, weil die Zählreihe außer der identischen Abbildung keine Einbettung in sich gestattet.