

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0: Ermutigung für Studienanfänger

Teil I: Zahlen

Kapitel 1: Mengen und Funktionen

1.1	Aller Anfang ist schwer	4
1.2	Mengen und Funktionen	5
1.3	Bildung von Mengen	7
1.4	Kartesisches Produkt	9
1.5	Funktionen und Abbildungen	10
1.6	Eigenschaften von Funktionen	11
1.7	Aufgaben	14

Kapitel 2: Körperaxiome und Anordnungsaxiome

2.1	Binäre Operationen	16
2.2	Gruppen und Körper	17
2.3	Erste Folgerungen aus den Axiomen	20
2.4	Ordnungsrelationen	21
2.5	Folgerungen aus den Anordnungsaxiomen	23
2.6	Absolutbetrag und Dreiecksungleichung	24
2.7	Aufgaben	26

Kapitel 3: Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

3.1	Induktive Mengen und die natürlichen Zahlen	27
3.2	Noch etwas Mengenlehre	28
3.3	Vollständige Induktion	29
3.4	Wohlordnung der natürlichen Zahlen	32
3.5	Folgen und Rekursion	33
3.6	Bernoullische Ungleichung und Binomischer Lehrsatz	34
3.7	Arithmetisches und geometrisches Mittel	37
3.8	Rationale Zahlen	38
3.9	Aufgaben	40

Kapitel 4: Das Vollständigkeitsaxiom

4.1	Rationale Zahlen genügen nicht.....	42
4.2	Dedekindsche Schnitte und Vollständigkeit.....	43
4.3	Supremum und Infimum.....	44
4.4	Das Archimedische Axiom.....	46
4.5	Intervalle.....	47
4.6	Dezimaldarstellung und Intervallschachtelung.....	48
4.7	Dehnungsbeschränkte Funktionen.....	50
4.8	Wurzeln.....	52
4.9	Aufgaben.....	53

Kapitel 5: Komplexe Zahlen und metrische Räume

5.1	Reelle Zahlen genügen nicht.....	54
5.2	Konstruktion der komplexen Zahlen.....	55
5.3	Ungleichungen.....	57
5.4	\mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n	59
5.5	Metrische Räume.....	61
5.6	Aufgaben.....	63

Teil II: Konvergenz und Stetigkeit

Kapitel 6: Konvergente Folgen

6.1	Beispiele.....	64
6.2	Der Begriff der Konvergenz.....	65
6.3	Einige wichtige Grenzwerte.....	67
6.4	Rechenregeln.....	70
6.5	Intervallschachtelung und Dezimaldarstellung.....	71
6.6	Überabzählbarkeit.....	72
6.7	Häufungswerte und Teilfolgen.....	74
6.8	Aufgaben.....	75

Kapitel 7: Konvergenzkriterien für Folgen

7.1	Monotone Folgen	77
7.2	Existenz von Häufungswerten	77
7.3	Cauchy-Folgen	79
7.4	Berechnung von Wurzeln	80
7.5	Die Eulersche Zahl e	82
7.6	Aufgaben	84

Kapitel 8: Unendliche Reihen

8.1	Nur eine Notation	87
8.2	Konvergenzkriterien	88
8.3	Die Exponentialreihe	92
8.4	Bedingte Konvergenz	92
8.5	Umordnung von Reihen	94
8.6	Produkte von Reihen	96
8.7	Die Exponentialfunktion	98
8.8	Partielle Summation und Abels Kriterium	100
8.9	Aufgaben	102

Kapitel 9: Stetige Funktionen

9.1	Stetigkeit	105
9.2	Dehnungsbeschränktheit	106
9.3	Folgenkriterium	107
9.4	Bildung neuer stetiger Funktionen	108
9.5	Isolierte Punkte und Häufungspunkte von Mengen	111
9.6	Grenzwerte bei Funktionen	113
9.7	Uneigentliche und einseitige Grenzwerte	115
9.8	Zwei Beispiele unstetiger Funktionen	117
9.9	Aufgaben	118

Kapitel 10: Abbildungseigenschaften stetiger Funktionen

10.1	Kompakte Mengen	120
10.2	Urbilder abgeschlossener und Bilder kompakter Mengen	121
10.3	Der Zwischenwertsatz	123
10.4	Umkehrfunktionen stetiger Funktionen	125
10.5	Topologische Kennzeichnung der Stetigkeit	127
10.6	Topologische Räume	128

10.7	Kompaktheit und der Satz von Heine - Borel	129
10.8	Quasikompakte Mengen und Hausdorff-Räume.....	131
10.9	Aufgaben.....	132

Kapitel 11: Folgen und Reihen von Funktionen

11.1	Punktweise Konvergenz.....	135
11.2	Gleichmäßige Konvergenz.....	136
11.3	Stetigkeit der Grenzfunktion.....	138
11.4	Konvergenzkriterien	139
11.5	Vertauschung von Grenzübergängen	141
11.6	Potenzreihen	142
11.7	Der Konvergenzradius	145
11.8	Ein Satz von Abel.....	148
11.9	Aufgaben.....	150

Kapitel 12: Spezielle Funktionen

12.1	Wachstum der Exponentialfunktion.....	152
12.2	Potenzen mit variablen Exponenten.....	152
12.3	Logarithmen.....	154
12.4	Hyperbelfunktionen und Kreisfunktionen	155
12.5	Die Kreiszahl π	159
12.6	Perioden der e -Funktion und der Kreisfunktionen.....	163
12.7	Fundamentalsatz der Algebra.....	165
12.8	Aufgaben.....	169

Teil III: Differentialrechnung einer Variablen

Kapitel 13: Differenzierbarkeit

13.1	Die Ableitung	172
13.2	Rechenregeln	175
13.3	Ableitung der Umkehrfunktion	178
13.4	Einseitige Ableitungen.....	181
13.5	Stetige Differenzierbarkeit	182
13.6	Aufgaben.....	184

Kapitel 14: Mittelwertsätze

14.1	Lokale Extrema und stationäre Punkte	185
14.2	Die beiden Mittelwertsätze	188
14.3	Monotone Funktionen	190
14.4	Konvexe Funktionen	192
14.5	Mehrfache Differenzierbarkeit	194
14.6	Zwischenwertsatz für Ableitungen	196
14.7	Regeln von Bernoulli und de l'Hospital	198
14.8	Aufgaben	200

Kapitel 15: Taylorpolynome und Taylorreihe

15.1	Lokale Approximation durch Polynome	204
15.2	Taylorsche Formeln	205
15.3	Lokale Extrema	208
15.4	Die Taylorreihe	209
15.5	Ableitung der Grenzfunktion	212
15.6	Potenzreihen	215
15.7	Identitätssatz für reell-analytische Funktionen	217
15.8	Aufgaben	219

Kapitel 16: Spezielle Reihen und numerische Verfahren

16.1	Die binomische Reihe	221
16.2	Der Arcustangens	224
16.3	Reihen für π	225
16.4	Zwei trigonometrische Reihen	228
16.5	Das Newtonsche Verfahren	231
16.6	Berechnung von Fixpunkten	236
16.7	Aufgaben	241

Teil IV: Integralrechnung einer Variablen

Kapitel 17: Stammfunktionen und Differentialgleichungen

17.1	Stammfunktionen	243
17.2	Partielle Integration und Substitution	245

17.3	Partialbruchzerlegung	248
17.4	Lineare Differentialgleichungen	251
17.5	Differentialgleichungen mit getrennten Variablen.....	255
17.6	Aufgaben.....	259

Kapitel 18: Das Riemannsches Integral

18.1	Intervallzerlegungen und Treppenfunktionen	261
18.2	Definition des Riemanschen Integrals	264
18.3	Beispiele und die Linearität und Monotonie des Integrals	267
18.4	Integration monotoner Funktionen.....	270
18.5	Integration stetiger Funktionen	271
18.6	Operationen mit integrierbaren Funktionen	273
18.7	Die Schwarzsche Ungleichung.....	275
18.8	Vertauschung der Integration mit Grenzübergängen.....	276
18.9	Aufgaben.....	278

Kapitel 19: Integration und Differentiation

19.1	Mittelwertsatz der Integralrechnung	280
19.2	Hauptsatz der Infinitesimalrechnung	281
19.3	Parameterabhängige Integrale	285
19.4	Leibnizsche Regel.....	285
19.5	Eine Formel vom Fubinischen Typ.....	287
19.6	Aufgaben.....	289

Kapitel 20: Uneigentliche Integrale

20.1	Eine Ausdehnung des Integralbegriffs.....	293
20.2	Die Gammafunktion	295
20.3	Das Reihenvergleichskriterium und die Zetafunktion	296
20.4	Gegenbeispiele.....	300
20.5	Das Fehlerintegral und die Gammafunktion.....	302
20.6	Parameterabhängige Integrale	304
20.7	Die Leibnizsche Regel	306
20.8	Nochmals die Gammafunktion.....	307
20.9	Aufgaben.....	310

Kapitel 21: Kurven und ihre Länge

21.1	Wege	313
21.2	Parametertransformationen und der Begriff der Kurve	315
21.3	Totale Variation und Länge von Wegen	317
21.4	Die Länge von Kurven	319
21.5	Beispiele: Ellipse und Zykloide	323
21.6	Aufgaben	326

Kapitel 22: Bogenlänge, Tangente, Normale und Krümmung

22.1	Die Bogenlänge als Kurvenparameter	328
22.2	Umrechnung von Ableitungen	330
22.3	Tangenten an Kurven	331
22.4	Die Normale bei ebenen Kurven	333
22.5	Das Argument längs ebener Kurven	334
22.6	Formeln für Argument und Umlaufzahl	337
22.7	Die Krümmung ebener Kurven	339
22.8	Krümmungskreis und Scheitelpunkte	341
22.9	Aufgaben	344

Teil V: Differentialrechnung in mehreren Variablen

Kapitel 23: Partielle Ableitungen und Differenzierbarkeit

23.1	Partielle Differenzierbarkeit	345
23.2	Richtungsableitungen und Stetigkeit	346
23.3	Differenzierbarkeit	348
23.4	Die Ableitung und die Jacobi-Matrix	351
23.5	Die Norm linearer Abbildungen	352
23.6	Der Gradient	353
23.7	Stetige Differenzierbarkeit	355
23.8	Höhere Ableitungen	357
23.9	Niveaumengen	358
23.10	Aufgaben	359

Kapitel 24: Rechenregeln für Ableitungen

24.1	Einfache Regeln	361
24.2	Die Kettenregel.....	362
24.3	Die Reihenfolge partieller Ableitungen	364
24.4	Vektorfelder und Potentiale.....	367
24.5	Integrale mit parameterabhängigen Grenzen	368
24.6	Eine Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes.....	370
24.7	Aufgaben.....	372

Kapitel 25: Taylorsche Formel und lokale Extrema

25.1	Polynome	373
25.2	Taylorsche Formel.....	375
25.3	Stationäre Stellen	377
25.4	Quadratische Formen.....	378
25.5	Lokale Extremalstellen	379
25.6	Beispiele	380
25.7	Aufgaben.....	384

Kapitel 26: Lokale Umkehrbarkeit von Funktionen

26.1	Wie lautet das richtige Ergebnis?.....	387
26.2	Der Banachsche Fixpunktsatz	388
26.3	Der Satz über lokale Umkehrbarkeit	390
26.4	Folgerungen	393
26.5	Kugelkoordinaten.....	395
26.6	Aufgaben.....	396

Kapitel 27: Implizite Funktionen und Mannigfaltigkeiten

27.1	Der Satz über implizite Funktionen	398
27.2	Beweis des Satzes über implizite Funktionen.....	400
27.3	Beispiele	402
27.4	Polynome mit parameterabhängigen Koeffizienten	402
27.5	Untermannigfaltigkeiten in \mathbb{R}^m	403
27.6	Der Satz über reguläre Werte.....	405
27.7	Der Immersionssatz.....	407
27.8	Der Begriff der Mannigfaltigkeit	410
27.9	Aufgaben.....	414

Kapitel 28: Tangentialebenen und bedingte lokale Extrema

28.1	Tangentialebenen an Untermannigfaltigkeiten.....	416
28.2	Flächennormalen	419
28.3	Lokale Extrema mit Nebenbedingungen.....	420
28.4	Die Multiplikatorenregel von Lagrange.....	421
28.5	Hauptachsentransformation von Quadriken	425
28.6	Die Norm linearer Abbildungen.....	428
28.7	Aufgaben.....	428

Teil VI: Integralrechnung in mehreren Variablen

Kapitel 29: Quadermaße

29.1	Quader und Quadermaße.....	433
29.2	Beispiele von Quadermaßen.....	435
29.3	Parkettierbare Mengen	438
29.4	Hilfssätze zur Fortsetzung von Quadermaßen.....	439
29.5	Fortsetzung von Quadermaßen auf parkettierbare Mengen.....	443
29.6	Aufgaben.....	444

Kapitel 30: Treppenfunktionen und Nullmengen

30.1	Treppenfunktionen	446
30.2	Integration von Treppenfunktionen	447
30.3	Riemann-integrierbare Funktionen.....	449
30.4	Nullmengen	449
30.5	Das Cantorsche Diskontinuum.....	451
30.6	Aufgaben.....	454

Kapitel 31: Integrierbarkeit

31.1	Monotone Nullfolgen von Treppenfunktionen.....	455
31.2	Monotone Folgen von Treppenfunktionen.....	457
31.3	Limiten monotoner Folgen von Treppenfunktionen	460
31.4	Integrierbare Funktionen	461
31.5	Beispiele	462
31.6	Integration über Teilmengen.....	465

Kapitel 32: Die Konvergenzsätze

32.1	Der Satz von Beppo Levi über monotone Konvergenz	466
32.2	Eine Axiomatik für das Integral	469
32.3	Sätze von Lebesgue über dominierte Konvergenz	470
32.4	Das Lemma von Fatou	473
32.5	Riemann-integrierbare Funktionen sind integrierbar	474
32.6	Kriterium für Riemannsches Integrierbarkeit	475
32.7	Uneigentliche Riemannsches Integrale	477
32.8	Aufgaben	478

Kapitel 33: Messbarkeit

33.1	Messbare und integrierbare Funktionen	480
33.2	Grenzübergänge bei messbaren Funktionen	481
33.3	Messbare Mengen	482
33.4	Messbarkeit von Funktionen und ihren Urbildmengen	484
33.5	Topologische Eigenschaften implizieren Messbarkeit	486
33.6	Das Auswahlaxiom	487
33.7	Nicht-messbare Mengen	489
33.8	Aufgaben	490

Kapitel 34: Die Banachräume L^p

34.1	Normierte Vektorräume	493
34.2	Die Höldersche und die Minkowskische Ungleichung	495
34.3	Der Raum L^∞	497
34.4	Hilberträume	497
34.5	Die Vollständigkeit der Räume L^p	500
34.6	Aufgaben	503

Kapitel 35: Mehrfache Integrale

35.1	Das Cavalierische Prinzip	505
35.2	Nullmengen bei Produktmaßen	507
35.3	Der Satz von Fubini	509
35.4	Der Satz von Tonelli	512
35.5	Beispiele	513
35.6	Aufgaben	516

Kapitel 36: Die Transformationsformel

36.1	Eine heuristische Überlegung	519
36.2	Ein Übertragungsprinzip	520
36.3	Translationsinvarianz von Integralen	523
36.4	Die Transformationsformel für lineare Transformationen	524
36.5	Hilfssätze über das Schrumpfen von Quadern	526
36.6	Das Volumen transformierter Würfel	528
36.7	Die Transformationsformel für Integrale	531
36.8	Beispiele	533
36.9	Bilder von Nullmengen und messbaren Mengen	535
36.10	Aufgaben	537

Teil VII: Integralsätze der Vektoranalysis

Kapitel 37: Vektorfelder, Kurvenintegrale, Pfaffsche Formen

37.1	Kurvenintegrale	540
37.2	Konservative Felder	543
37.3	Potentiale	544
37.4	Dualraum und duale Basis	547
37.5	Pfaffsche Formen	549
37.6	Transformation Pfaffscher Formen	551
37.7	Aufgaben	553

Kapitel 38: Inhalt von Hyperflächen

38.1	Ansatz zur Definition von Flächeninhalten	555
38.2	Inhaltsformel für Hyperflächen	556
38.3	Unabhängigkeit von der Parameterdarstellung	560
38.4	Bewegungsinvarianz	562
38.5	Das vektorielle Produkt in \mathbb{R}^3	563
38.6	Beispiele	566
38.7	Aufgaben	568

Kapitel 39: Zirkulation und Rotation von Vektorfeldern

39.1	Die Zirkulation	569
39.2	Infinitesimale Zirkulation	572
39.3	Die Rotation	573

Kapitel 40: Zerlegungen der Eins und der Satz von Green

40.1	Zerlegungen der Eins	576
40.2	Glatt berandete Bereiche	579
40.3	Lokale Version des Satzes von Green	580
40.4	Der Satz von Green in der Ebene	582
40.5	Zulässige Bereiche	583
40.6	Anwendungen	585
40.7	Aufgaben	586

Kapitel 41: Der Satz von Stokes im dreidimensionalen Raum

41.1	Vektorielles Oberflächenelement und der Fluss eines Feldes	588
41.2	Zulässige Flächen	591
41.3	Induzierte Vektorfelder	593
41.4	Der Satz von Stokes	595
41.5	Aufgaben	596

Kapitel 42: Der Integralsatz von Gauß

42.1	Parallelotope und ihre Randzyklen	598
42.2	Die Divergenz eines Vektorfeldes	600
42.3	Glatt berandete Bereiche	602
42.4	Lokale Version des Satzes von Gauß	604
42.5	Der Satz von Gauß für glatt berandete Bereiche	605
42.6	Der Satz von Gauß für zulässige Bereiche	606
42.7	Aufgaben	608

Kapitel 43: Alternierende Differentialformen

43.1	Alternierende Multilinearformen	609
43.2	Das äußere Produkt	610
43.3	Die Standarddarstellung alternierender Multilinearformen	614
43.4	Differentialformen	615
43.5	Die Ableitung von Differentialformen	616
43.6	Beispiele	618
43.7	Zurückholen von Differentialformen	620

Kapitel 44: Der allgemeine Satz von Stokes für Zellen

44.1	Randzyklen von Quadern	623
44.2	Integration über Ränder von Quadern	624
44.3	Der allgemeine Satz von Stokes für Quader	625
44.4	Zellen und Integration über Zellen	626
44.5	Formale Summen, Ketten, Zyklen und Ränder	629
44.6	Die allgemeine Stokessche Formel für Zellen	631

Teil VIII: Fourierreihen und Fourierintegrale

Kapitel 45: Das Problem der schwingenden Saite

45.1	Die Differentialgleichung der schwingenden Saite	633
45.2	Lösungen von d'Alembert und Euler	635
45.3	Lösung von Daniel Bernoulli	637
45.4	Eine Kontroverse	639
45.5	Zum Werk von Fourier und Dirichlet	641

Kapitel 46: Zwei gute Eigenschaften von Fourierreihen

46.1	Notationen und Grundbegriffe	643
46.2	Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen	644
46.3	Die Formeln von Euler und Fourier	646
46.4	Die Fourierreihe einer periodischen Funktion	647
46.5	Approximation im Mittel	648
46.6	Der Begriff der Konvergenz im Mittel	650

Kapitel 47: Cesàro-Summierbarkeit und der Satz von Fejér

47.1	Harmonische Analyse und harmonische Synthese	651
47.2	Cesàro-Summierbarkeit	652
47.3	Der Fejérsche Kern	653
47.4	Regelfunktionen	655
47.5	Der Satz von Fejér für Regelfunktionen	657
47.6	Integrationstheorie und der Raum $L^2_{2\pi}$	659
47.7	Der Satz von Fejér	661

Kapitel 48: Beispiele und Anwendungen zum Fejérschen Satz

48.1	Einige stetige Funktionen	663
48.2	Einige unstetige Funktionen	667
48.3	Partialbruchreihen für $1/\sin x$ und für den Cotangens.....	671
48.4	Die Zetawerte an positiven geradzahligten Stellen.....	674
48.5	Der Approximationssatz von Weierstraß	676

Kapitel 49: Punktweise Konvergenz

49.1	$(C, 1)$ -Konvergenz und Konvergenz	678
49.2	Ein Konvergenzkriterium für Fourierreihen.....	679
49.3	Stückweise stetig differenzierbare Funktionen	680
49.4	Funktionen mit beschränkter Variation	682
49.5	Der Satz von Dirichlet und Jordan.....	684
49.6	Ein Beispiel von Fejér	685
49.7	Ein Beispiel zum Phänomen von Gibbs	688
49.8	Das Gibbssche Phänomen	691

Kapitel 50: Konvergenz im Mittel und Vollständigkeit

50.1	Konvergenz im Mittel für Regelfunktionen	692
50.2	Vollständigkeit und der Satz von Riesz-Fischer	693
50.3	Besselsche Gleichung und Ungleichung.....	694
50.4	Vollständige Orthonormalsysteme.....	695
50.5	Vollständigkeit des trigonometrischen Orthonormalsystems.....	698
50.6	Beispiele	700
50.7	Das isoperimetrische Problem.....	702

Kapitel 51: Komplexe Fourierreihen und Abstrakte Harmonische Analyse

51.1	Fourierreihen in komplexer Form	706
51.2	Komplexwertige quadratisch integrierbare Funktionen.....	707
51.3	Fourierreihen nach dem Orthonormalsystem χ^n	708
51.4	Stetige Charaktere der Kreisgruppe	709
51.5	Operation der Kreisgruppe auf dem Funktionenraum	711
51.6	Invariante und irreduzible Teilräume.....	713
51.7	Ein Ausblick auf Verallgemeinerungen	715

Kapitel 52: Das Problem der Wärmeausbreitung in einem Stab	
52.1	Wärmeleitung in einem Stab..... 718
52.2	Fouriers Lösung 719
52.3	Wärmeleitung in einem unendlichen Stab..... 720
52.4	Fourierintegrale und Fouriersche Umkehrformel 722
52.5	Die Formel von Plancherel..... 723
Kapitel 53: Fourierintegrale	
53.1	Das Riemannsches Lemma..... 725
53.2	Der Dirichletsche Kern und ein uneigentliches Integral 727
53.3	Das Kriterium von Dini 729
53.4	Das Riemannsches Lokalisationsprinzip 731
53.5	Kriterien von Dirichlet und Jordan 732
53.6	Ein Mittelwertsatz für Integrale 734
53.7	Beispiele 737
53.8	Verallgemeinerung der Konvergenzkriterien 739
Kapitel 54: Fouriertransformation integrierbarer Funktionen	
54.1	Definition der Fouriertransformierten..... 743
54.2	Zwei Beispiele 744
54.3	Eigenschaften der Fouriertransformierten 746
54.4	Die Faltung 748
54.5	Der Approximationssatz 751
54.6	Der Umkehrsatz 752
54.7	Schnell fallende Funktionen und die Formel von Plancherel..... 754
54.8	Ein Orthogonalsystem in $L^2(\mathbb{R})$ 756
Literatur 759
Index 763