

# Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	vi
Vorwort	ix
Zeittafel	xiv
<b>Kapitel 1 Vorbetrachtungen</b>	<b>1</b>
1.1 Mathematische Induktion	1
1.2 Der Binomialsatz	8
1.3 Die Anfänge der Zahlentheorie	13
<b>Kapitel 2 Teilbarkeitstheorie der ganzen Zahlen</b>	<b>19</b>
2.1 Der Divisionsalgorithmus	19
2.2 Der größte gemeinsame Teiler	22
2.3 Der Euklidische Algorithmus	31
2.4 Die diophantische Gleichung $ax + by = c$	38
<b>Kapitel 3 Primzahlen und ihre Verteilung</b>	<b>47</b>
3.1 Der Fundamentalsatz der Zahlentheorie	47
3.2 Das Sieb des Eratosthenes	53
3.3 Die Goldbachsche Vermutung	61
<b>Kapitel 4 Die Theorie der Kongruenzen</b>	<b>73</b>
4.1 Carl Friedrich Gauß	73
4.2 Elementare Eigenschaften der Kongruenzen	75
4.3 Spezielle Teilbarkeitsprüfungen	82
4.4 Lineare Kongruenzen	89
<b>Kapitel 5 Der Satz von Fermat</b>	<b>99</b>
5.1 Pierre de Fermat	99
5.2 Fermats Faktorisierungsverfahren	101
5.3 Der Kleine Satz von Fermat	106
5.4 Der Satz von Wilson	114
<b>Kapitel 6 Zahlentheoretische Funktionen</b>	<b>119</b>
6.1 Die Funktionen $\tau$ und $\sigma$	119
6.2 Die Möbiussche Umkehrformel	130
6.3 Das Größte Ganze	135

<b>Kapitel 7</b>	<b>Eulers Verallgemeinerung des Satzes von Fermat</b>	143
7.1	Leonhard Euler	143
7.2	Eulers $\phi$ -Funktion	145
7.3	Der Satz von Euler	151
7.4	Einige Eigenschaften der $\phi$ -Funktion	156
7.5	Eine Anwendung auf die Kryptographie	162
<b>Kapitel 8</b>	<b>Primitive Wurzeln und Indizes</b>	177
8.1	Die Ordnung einer natürlichen Zahl modulo $n$	177
8.2	Primitive Wurzeln von Primzahlen	184
8.3	Zusammengesetzte Zahlen mit primitiven Wurzeln	193
8.4	Die Theorie der Indizes	199
<b>Kapitel 9</b>	<b>Das Quadratische Reziprozitätsgesetz</b>	207
9.1	Das Kriterium von Euler	207
9.2	Das Legendre-Symbol und seine Eigenschaften	214
9.3	Quadratische Reziprozität	227
9.4	Quadratische Kongruenzen mit zusammengesetzten Moduln	236
<b>Kapitel 10</b>	<b>Vollkommene Zahlen</b>	241
10.1	Die Suche nach vollkommenen Zahlen	241
10.2	Mersennesche Primzahlen	248
10.3	Fermatsche Zahlen	260
<b>Kapitel 11</b>	<b>Die Fermatsche Vermutung</b>	269
11.1	Pythagoräische Tripel	269
11.2	Der berühmte „Letzte Satz“	277
<b>Kapitel 12</b>	<b>Darstellung ganzer Zahlen als Quadrat-Summen</b>	287
12.1	Joseph Louis Lagrange	287
12.2	Summen von zwei Quadraten	289
12.3	Summen von mehr als zwei Quadraten	300
<b>Kapitel 13</b>	<b>Fibonacci-Zahlen</b>	313
13.1	Die Fibonacci-Folge	313
13.2	Einige Identitäten mit Fibonacci-Zahlen	320
<b>Kapitel 14</b>	<b>Kettenbrüche</b>	331
14.1	Srinivasa Ramanujan	331
14.2	Endliche Kettenbrüche	334
14.3	Unendliche Kettenbrüche	347
14.4	Die Pellische Gleichung	362
<b>Kapitel 15</b>	<b>Einige Entwicklungen im 20<sup>ten</sup> Jahrhundert</b>	379
15.1	Hardy, Dickson und Erdős	379
15.2	Primzahltests und Faktorisierung	384
15.3	Der Primzahlsatz	394

<b>Anhang</b>	Die Bertrandsche Vermutung . . . . .	403
	Tabellen . . . . .	412
	Liste der bekannten vollkommenen Zahlen . . . . .	412
	Tabelle 1: kleinste primitive Wurzeln . . . . .	413
	Tabelle 2: kleinste Primfaktoren . . . . .	414
	Tabelle 3: Primzahlen . . . . .	424
	Tabelle 4: Häufigkeit von Primzahlen und Primzahlzwillingen . . . . .	426
	Tabelle 5: Quadrate und Kuben . . . . .	427
	Tabelle 6: Werte zahlentheoretischer Funktionen . . . . .	434
	Liste der verwendeten Symbole . . . . .	436
	Liste der Definitionen, Sätze, Korollare, Lemmata und Beispiele . . . . .	438
	MATHEMATICA <sup>®</sup> -Funktionen für die elementare Zahlentheorie . . . . .	445
	<b>Lösungen zu den Übungsaufgaben</b> . . . . .	453
	<b>Literaturverzeichnis</b> . . . . .	739
	<b>Stichwortverzeichnis</b> . . . . .	747