Landau, E.

Grundlagen der Analysis. (Das Rechnen mit ganzen, rationalen, irrationalen, komplexen Zahlen.) Ergänzung zu den Lehrbüchern der Differential- und Integralrechnung.

XIV + 134 S. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft. 1930.

Das vorliegende Buch füllt eine Lücke in der Lehrbuchliteratur aus, insofern als es einen keinen Schluß auslassenden Aufbau der Arithmetik der reellen und komplexen Zahlen von der axiomatischen Einführung der natürlichen Zahlen aus zum einzigen Gegenstand hat. In den Lehrbüchern und Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, in denen überhaupt ein logisch geschlossener Aufbau durchgeführt wird, wird im allgemeinen das Fundament weniger tief gelegt, indem entweder die rationalen Zahlen mit ihren Rechenregeln als bekannt vorausgesetzt werden und daraus in bekannter Weise die Arithmetik der durch Schnitte oder Fundamentalreihen oder Intervallschachtelungen definierten reellen Zahlen entwickelt wird (vgl. z. B. die Bücher von *Kowalewski*, *Schlömich-Kneser* (6. Aufl.), *Mangoldt-Knopp* (5. Aufl.), *Bieberbach*) oder die Menge der reellen Zahlen selbst als fertig vorliegend und einem Stetigkeitsaxiom – z. B. dem *Dedekindschen* – genügend angenommen wird. Der zweite Standpunkt wird vielfach bevorzugt, weil eine eingehendere Beschäftigung mit dem Zahlbegriff in der Vorlesung über Infinitesimalrechnung dem eigentlichen Stoff dieser Vorlesung zu viel Zeit entziehen würde; er ist berechtigt, wenn der Aufbau der reellen Zahlen in einer vorangehenden oder parallellaufenden Vorlesung besprochen wird, wie Verf. das durch Teilung seiner Vorlesung in zwei Teile getan hat, und wie das in etwas anderer Form auch an einigen anderen Universitäten üblich ist, oder – wie das z. B. von *Toeplitz* (F. d. M. 53, 54 – 55) gefordert worden ist – am Schluß der zweisemestrigen Vorlesung über Infinitesimalrechnung nachgetragen wird. Darstellungen, die statt mit den rationalen mit den ganzen Zahlen beginnen, begnügen sich, wie z. B. das 1930 erschienene Buch von *Phillips* (F. d. M. 56_{I}, 193 – 194), häufig damit, den Aufbau nur in großen Zügen anzudeuten.

Verf. legt seinem Aufbau die bekannten *Peanoschen* Axiome für die natürlichen Zahlen zugrunde. Bei der Addition weicht Verf. auf Grund eines von *Grandjot*, aber schon früher auch von anderer Seite, z. B. von *Erhard Schmidt* in seinen Vorlesungen, geäußerten Bedenkens gegen die übliche induktive Definition der Addition der natürlichen Zahlen von der herkömmlichen Darstellung ab, indem er – nach Herleitung der nur triviale Folgerungen der Axiome aussagenden Sätze 1, 2, 3 – nach *Kalmár* folgenden Satz 4 beweist, der zugleich die Definition der Addition enthält:

„Auf genau eine Art läßt sich jedem Zahlenpaar x, y eine natürliche Zahl, $x+y$ genannt (+ sprich: plus), so zuordnen, daß

$$x + 1 = x' \qquad \text{für jedes } x, \tag{1}$$

$$x + y' = (x + y)' \qquad \text{für jedes } x \text{ und jedes } y. \tag{2}$$

$x+y$ heißt die Summe von x und y oder die durch Addition von y zu x entstehende Zahl.“ (x' bezeichnet den Nachfolger von x.) Die Schwierigkeit, auf die Verf. durch

Grandjots Bemerkung aufmerksam gemacht worden ist, ist damit in sehr einfacher Weise überwunden. Dieselbe Schwierigkeit ergibt sich auch bei der Definition von $x \cdot y$ für natürliche Zahlen und bei der Definition von $\sum_{n=1}^{m} x_n$ und $\prod_{n=1}^{m} x_n$, wenn für irgendein Zahlgebiet $x + y$ und $x \cdot y$ schon definiert sind. An der ersten Stelle verfährt Verf. genau wie bei der Definition von $x + y$ für natürliche Zahlen, an der zweiten im Anschluß an *Dedekind* unter Benutzung der Anordnung, was bei $x + y$ prinzipiell auch möglich gewesen wäre, aber eine größere Änderung der Darstellung erfordert hätte, da Verf., dem bequemeren *Peanoschen* Wege folgend, die Ordnung der natürlichen Zahlen erst nach der Addition einführt.

Der weitere Gang der Darstellung ist aus dem *Inhaltsverzeichnis* ersichtlich: Vorwort für den Lernenden. Vorwort für den Kenner. Kap. I. Natürliche Zahlen: § 1. Axiome. § 2. Addition. § 3. Ordnung. § 4. Multiplikation. Kap. II. Brüche: § 1. Definition und Äquivalenz. § 2. Ordnung. § 3. Addition. § 4. Multiplikation. § 5. Rationale Zahlen und ganze Zahlen. Kap. III. Schnitte: § 1. Definition. § 2. Ordnung. § 3. Addition. § 4. Multiplikation. § 6. Rationale Schnitte und ganze Schnitte. Kap. IV. Reelle Zahlen: § 1. Definition. § 2. Ordnung. § 3. Addition. § 4. Multiplikation. § 6. *Dedekindscher* Hauptsatz. Kap. V. Komplexe Zahlen: § 1. Definition. § 2. Addition. § 3. Multiplikation. § 4. Subtraktion. § 5. Division. § 6. Konjugierte Zahlen. § 7. Absoluter Betrag. § 8. Summen und Produkte. § 9. Potenzen. § 10. Einordnung der reellen Zahlen.

Das Buch ist in dem aus anderen Werken des Verf. bekannten, nur ganz vereinzelt durch Zwischenbemerkungen unterbrochenen Rhythmus „Definition“, „Satz“, „Beweis“, ... abgefaßt und von mustergültiger, unübertrefflicher Klarheit und Exaktheit; es kann den Mathematikern aller Grade auf das wärmste empfohlen werden. Besonders eindringlich sei aber die Lektüre dieses Buches, als Gegengewicht gegen so manche mündlich oder schriftlich vorgetragene „Didaktik“ des mathematischen Unterrichts, den Lehrern der höheren Schulen ans Herz gelegt. (III 1.)

Besprechungen: Nature 127 (1931), 624. M. S.; Chr. Huygens 8 (1930), 207-208.

Feigl, G.; Prof. (Breslau)