Vorlesungen zum Gedenken an Felix Hausdorff
E. Eichhorn. E. J. Thiele (Hrsg.)

207–212

Der Grundlagenstreit zwischen Brouwer und Hilbert

Dirk van Dalen, Utrecht

Am Anfang unseres Jahrhunderts wurde die mathematische Gemeinschaft erschreckt durch die auftauchenden Paradoxien (z.B. von Cantor, Russell, Burali-Forti, Richard). Die plötzliche Blüte der Grundlagenforschung ist darauf teilweise zurückzuführen, aber die Bedeutung soll sicher nicht überschätzt werden. Die Tätigkeit von Russell und Whitehead ist gewissermaßen auf die Grundlagenkrise zurückzuführen, aber die Formalisierung und die Axiomatisierung hatten schon früher angefangen, und *Die Grundlagen der Geometrie* von Hilbert sind doch mehr technische Forschungen in der Geometrie als ‚Grundlegung' der Mathematik.

Genauso sind die Brouwerschen Arbeiten unabhängig von den Paradoxien entstanden; Brouwer beschäftigte sich in seiner Dissertation teilweise mit einem konstruktiven Neuaufbau der Mathematik und teilweise mit der Kritik an der logischen, bzw. formalistischen Begründung der Mathematik. Sogar Zermelo's Axiomatisierung der Mengenlehre war eher veranlaßt durch die Kritik an seinem Beweise des Wohlordnungssatzes als durch das Auftreten der Paradoxien. Natürlich war für Brouwer, Hilbert und Zermelo das Vermeiden der Paradoxien ein angenehmes Nebenprodukt, aber Hauptsache war es nicht.

Ganz kurz gefaßt kann man sagen, daß für Brouwer die Mathematik eine inhaltliche geistige Tätigkeit war, ein geistiges Schöpfen und Konstruieren, unabhängig von Logik, Sprache und Erfahrung, und sich frei entwickelnd. Für Hilbert dagegen war (im Jahre 1904) Mathematik die Wissenschaft der formalen Systeme.

Der sogenannte Grundlagenstreit, von dem ich hier ganz kurz berichte, hatte seine Wurzeln in den Ansichten von Hilbert und Brouwer, und beschränkte sich auf den Gegensatz Intuitionismus vs. Formalismus.

Als Brouwer 1907 seine Dissertation veröffentlichte, gab es nur Hilberts Heidelberger Arbeit von 1904, die ziemlich programmatisch und wenig präzise war. Die Brouwersche Dissertation enthält eine fundamentale Kritik an Hilberts formalistischer Begründung, und dazu auch eine verfeinerte Analysis der sprachlich-metamathematischen Stufen, die in der formalistischen Begründung benutzt werden sollten. Seine Überlegungen, und insbesondere die Idee der Stufen, hat er tatsächlich 1909 Hilbert mitgeteilt, als dieser in Scheveningen Ferien machte. Hilberts Reaktion ist nicht bekannt – zu dieser Zeit hatten sowohl Hilbert als Brouwer mehr zu tun als Grundlagen zu diskutieren; Hilbert hatte sich stark der mathematischen Physik zugewandt, und Brouwer machte vorläufig Topologie.

Erst nach dem ersten Weltkrieg veröffentlichte Brouwer seine Grundlagenarbeit, in der seine neuen unendlichen Objekte das Licht der Welt erblickten. In einer trockenen mathematischen Darstellung präsentierte Brouwer seine Wahlfolgen und entwickelte die Basis späterer Veröffentlichungen (Brouwer 1918). Zu gleicher Zeit erschien Hermann Weyls „Das Kontinuum", eine „arithmetische" klassische Theorie der Analysis.
Zu dieser Zeit gab es noch keine Reibungen zwischen Hilbert und Brouwer und Weyl; im Gegenteil, Weyl war Hilberts Lieblingsschüler, und die Beziehungen zwischen Brouwer und Hilbert waren recht herzlich.
Wenn man einen Anfangspunkt des Grundlagenstreits sucht, so ist Weyls Rede „Über die neue Grundlagenkrise in der Mathematik" (1920) der geeignetste Kandidat. Wo Brouwer noch jahrelang dem Konflikt auswich, indem er möglichst trocken und akademisch seine Ansichten vertrat, war Weyls Arbeit eine regelrechte Kampfansage, mit Begeisterung geschrieben, voll literarischem Schwung. Manches Zitat aus dem Grundlagenstreit stammt aus dieser Arbeit: „die Auflösung des Staatswesens der Analysis", „Brouwer, das ist die Revolution", „Mathematik als Papierwirtschaft", ...
In seinen Reaktionen bezog Hilbert sich wiederholt auf diese Äußerungen; mehr als Brouwers Arbeiten hatte ihn wahrscheinlich Weyl gereizt, den Streit anzufangen.
Brouwers erste Aktion auf deutschem Boden war 1920, als er auf dem Naturforscher-Kongreß in Bad Nauheim vortrug über das Thema „Hat jede reelle Zahl eine Dezimalbruchentwicklung?"; da trat er zuerst persönlich in die Öffentlichkeit, und es läßt sich vermuten, daß sein Vortrag mehr informelle Elemente enthielt als die spätere Arbeit.
Hilbert reagierte 1921 auf die Äußerungen von Weyl und Brouwer in seinem Vortrag „Neubegründung der Mathematik" (Kopenhagen und Hamburg). Es ist bemerkenswert, daß Hilbert, der der Philosophie nicht sehr nahe stand, in diesem und späteren Vorträgen (und zugehörigen Veröffentlichungen) der Grundlagenpolemik viel Platz einräumte. Wo Brouwer und Weyl sich gegen bestimmte Aspekte der modernen Mathematik richteten, war es Hilbert, der das persönliche Element in die Polemik einführte. Er beschuldigte die beiden „einer Verbotsdiktatur à la Kronecker" und erklärte, daß Brouwer „nicht die Revolution war, sondern nur die Wiederholung eines Putschversuches".
Auf der Jahrestagung von 1922 in Leipzig trug Hilbert vor über „Die logischen Grundlagen der Mathematik"; dieser Vortrag war viel sachlicher und führte wertvolle metamathematische Hilfsmittel, wie den τ-Operator, ein, und er spezifizierte ein Fragment der Mathematik, das ausreichend sein sollte für die Metamathematik: die finite Mathematik (sagen wir primitiv rekursive Arithmetik).
Auf der nächsten Jahrestagung, Marburg 1923, war Brouwer wieder am Zug. Er redete über „Die Rolle des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik". In diesem Vortrag äußerte er sich ziemlich ablehnend zur Hilbertschen Konsistenzbeweis-Idee:

> „eine durch keinen widerlegenden Widerspruch zu hemmende unrichtige Theorie ist darum nicht weniger unrichtig, so wie eine durch kein reprimierendes Gericht zu hemmende verbrecherische Politik darum nicht weniger verbreche-

risch ist" (Brouwer 1923).

In diesem Vortrag bemühte Brouwer sich zum erstenmal, die Unrichtigkeit von bestimmten klassischen Sätzen zu zeigen. Dazu bediente er sich einer Art von Gegenbeispielen, die heute Brouwersche Gegenbeispiele genannt werden. Der Trick ist, einen mathematischen Satz auf ein anerkanntes unlösbares Problem zu reduzieren.
Ein einfaches Beispiel: man bestimme der Reihe nach die Dezimalen von π und definiere zu gleicher Zeit die Dezimalen einer Zahl a: man kopiert die Dezimalen von π bis eine Folge 0123456789 auftritt, von diesem Moment wählt man nur 0. Die Frage ob $a < \pi$ ist also gleichbedeutend mit der Frage „gibt es eine Folge 0123456789 in der Dezimalbruchentwicklung von π?" Weil die letzte Frage jetzt weder bejaht noch verneint werden kann, kann man auch nicht behaupten, daß $a < \pi$ oder $a = \pi$, — oder sogar $a = \pi$ oder $a \neq \pi$. Es gibt also ganz einfache *mathematische* Gegenbeispiele gegen das Prinzipium Tertium non Datur. Man kann sich leicht weitere Brouwersche Gegenbeispiele denken: z.B. es ist unerlaubt zu sagen, daß jede Teilmenge von $\mathbb{N}$ endlich oder unendlich ist: man betrachte $A = \{n \in \mathbb{N} \mid R\}$, wo R die Riemannsche Vermutung ist.

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{N} \Leftrightarrow R \quad \text{ist richtig und} \\ A &= \emptyset \Leftrightarrow R \quad \text{ist unrichtig.} \end{aligned}$$

Also, „A ist endlich oder unendlich" heißt „$\neg R$ oder R". Das letztere ist leider unbekannt. Eine ähnliche Menge, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid R \vee \neg R\}$, ist noch rätselhafter. Wir sehen unmittelbar, daß $B \neq \emptyset$, aber es ist unbekannt, ob B überhaupt ein Element enthält (d.h. unbewohnt ist). Wenn dieses B bewohnt ist, ist sie sogar unendlich.
Die Brouwer'schen Gegenbeispiele findet man schon in Brouwer 1918, aber die didaktische Ausnützung ließ bis 1923 (abgesehen von einer Verwendung 1920) auf sich warten; vielleicht wollte Brouwer auch den geringsten Schein eines Angriffs vermeiden.
Die persönlichen Beziehungen zwischen Brouwer und Hilbert verschlechterten sich allmählich; 1923 beklagte Brouwer sich in einem Brief an Bieberbach über „Hilberts Hetze gegen mich". Dennoch wurde Brouwer 1924 eingeladen, um in der Göttinger Mathematischen Gesellschaft vorzutragen. Sein Thema war „Konsequenzen des intuitionistischen Standpunktes in der Mathematik". Hilberts Kommentar war vielsagend: „Mit Ihren Methoden müßten die meisten Resultate der modernen Mathematik aufgegeben werden, und für mich ist es wichtig, mehr und nicht weniger Resultate zu bekommen". Brouwer hätte dem wahrscheinlich voll zugestimmt, nur betonte er wiederholt, daß die Resultate auf legale Weise erreicht werden sollten.
1925 war Hilbert zur Weierstrass-Woche in Münster eingeladen; hier entwickelte er sein Programm weiter und führte das ϵ-Symbol in die Metamathematik ein. Der Vortrag war zum Teil polemisch, zum Teil technischer Natur (zur Lösung des Kontinuumproblems wurden zum Beispiel auch die Funktionale höheren Typs eingeführt).
1926 war Brouwer von der Göttinger Mathematischen Gesellschaft eingeladen, und Paul Alexandroff und Emmy Noether benutzten diese Gelegenheit, um eine Versöhnung zwischen Brouwer und Hilbert zu arrangieren. Das Ergebnis war positiv, aber nicht dauerhaft;

1927 hämmerten Brouwer und Hilbert wieder los. Brouwer verbuchte großen Beifall in Berlin, wo er ein paar Monate Vorlesungen hielt. Die Zukunft des Intuitionismus schien durchaus aussichtsvoll, die deutschen Mathematiker nahmen die intuitionistische Kritik ziemlich ernst.

In demselben Jahre steigerten sich Hilberts persönliche Angriffe zu einer neuen Höhe; in seinem Hamburger Vortrag „Die Grundlagen der Mathematik":

> „Ich staune unter diesen Umständen darüber, daß ein Mathematiker an der strengen Gültigkeit der Schlußweise des Tertium non Datur zweifelt. Ich staune noch mehr darüber, daß, wie es scheint, eine ganze Gemeinde von Mathematikern sich heute zusammengefunden hat, die das gleiche tut. Ich staune am meisten über die Tatsache, daß überhaupt auch im Kreise der Mathematiker die Suggestivkraft eines einzelnen temperamentvollen und geistreichen Mannes die unwahrscheinlichsten und exzentrischsten Wirkungen auszuüben vermag".

Brouwer erwiderte in seinen „Intuitionistischen Betrachtungen über den Formalismus" (Brouwer 1928), daß der Formalismus „vom Intuitionismus nur Wohltaten empfangen und weitere Wohltaten zu erwarten" hätte. Und er konnte hinzufügen „daß im Rahmen des Formalismus von der eigentlichen Mathematik bisher noch immer *nichts* gesichert ist, wogegen der Intuitionismus auf der Grundlage seiner konstruktiven Mengendefinition und seiner Haupteigenschaft der finiten Mengen schon einige Lehrgebäude der eigentlichen Mathematik errichtet hat".

Das nächste Jahr brachte das Ende des Grundlagenstreites. Im März 1928 bezauberte Brouwer noch einmal in Wien seine Zuhörer, als er seine Gastvorträge „Die Struktur des Kontinuums" und „Mathematik, Wissenschaft und Sprache" hielt, — Wittgensteins Rückkehr zur Philosophie wurde da entschieden.

Aber die Konfrontation mit Hilbert wurde immer greller. Als die Mathematiker in Bologna ihren internationalen Kongreß veranstalteten, riet Brouwer den Deutschen, nicht teilzunehmen, bevor sie völlig anerkannt wurden; Hilbert dagegen befürwortete die Teilnahme als ein Zeichen der Normalisierung der internationalen Beziehungen.

In der Tat reiste eine substantielle Delegation von deutschen Mathematikern nach Bologna, und Hilberts Auftritt wurde mit Begeisterung begrüßt.

Brouwers Verhalten hatte Hilbert dermaßen geärgert, daß er, also der letztere, lebensgefährlich erkrankte und Brouwer als Redakteur der Mathematischen Annalen entließ. Der darauf folgende Streit war so erbittert, daß Brouwer, nach seiner endgültigen Entfernung aus der Redaktion, sich tief beleidigt in Schweigen zurückzog.

Faktisch wurde der Grundlagenstreit also aufgrund von außerwissenschaftlichen Vorfällen beendet. Als 1931 Gödels Unvollständigkeitssatz die Unhaltbarkeit von Hilberts Programm – Konsistenzbeweise mit Hilfe von finiten Methoden – unverkennbar zeigte, gab es schon keinen Grundlagenstreit mehr.

Tatsächlich war der Streit ein Mißverständnis, wie wir jetzt besser sehen können. Logiker wie Gentzen und Spector hatten, was schon Brouwer angekündigt hatte, ganz klar gesehen, daß der Intuitionismus Mittel schafft, die gewünschten Konsistenzbeweise, allerdings nur teilweise, zu erbringen.

Literatur

Brouwer, L.E.J.

1907 *Over de grondslagen der wiskunde.* Academisch proefschrift. [*Zu den Grundlagen der Mathematik.* Dissertation] Maas & van Suchtelen, Amsterdam, 183 pp.

1918 *Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten.* Erster Teil, Allgemeine Mengenlehre. Koninklijke Akademie van Wetenschappen Verhandelingen 1e sectie, deel XII. no. 5, pp. 1–43.

1921 *Besitzt jede reelle Zahl eine Dezimalbruch-Entwicklung?* Mathematische Annalen 83, 201-210.

1923 *Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik, insbesondere in der Funktionentheorie.* Journal für reine und angewandte Mathematik, 154, pp. 1-8.

1923a *Die Rolle des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten in der Mathematik.* Jahresbericht D.M.V. 33, p. 67.

1928 *Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus.* Koninklijke Akademie van Wetenschappen Proceedings 31, pp. 374-379; auch in: Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, pp. 48–52.

1929 *Mathematik, Wissenschaft und Sprache.* Monatshefte für Mathematik und Physik 36, pp. 153–164.

1930 *Die Struktur des Kontinuums.* Wien [Sonderabdruck].

Hilbert, D.

1904 *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik, Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904*, Teubner, Leipzig, (1905), 174–185.

1922 *Neubegründung der Mathematik (Erste Mitteilung)*, Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 1, 157–177.

1922a *Die logischen Grundlagen der Mathematik*, Mathematische Annalen 88, 151–165.

1925 *Über das Unendliche*, Mathematische Annalen 95, 161–190.

1927 *Die Grundlagen der Mathematik*, Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 6, 65–85.

Weyl, H.

1919 *Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik*, Math. Zeitschrift 10, p. 39–79.