Vorlesungen zum Gedenken an Felix Hausdorff
E. Eichhorn, E. J. Thiele (Hrsg.)

191–206

Fraktale und Mathematik – eine elementare Einführung

E. Behrends[88]

Der heutige Vortrag soll mit einigen mathematischen Grundlagen des Themas "Fraktale" vertraut machen.
Hier die Titel der einzelnen Abschnitte:

1. Fraktale: Die Vorgeschichte

Der Begriff "Fraktal" wurde vor etwa 10 Jahren geprägt. Er bezeichnet Gebilde, die "irgendwie zerklüftet" sind. Daraus sollte man aber nicht den Schluß ziehen, daß es vorher keine Fraktale gab. Sie tauchten vielmehr – ohne daß es dafür einen eigenen Namen gab – schon vor über hundert Jahren in der Mathematik auf. Allerdings spielten sie überwiegend eine eher negative Rolle: an ihnen konnte man gut demonstrieren, daß man bei der Behandlung von Längen, Flächen und Volumina sehr sorgfältig vorgehen mußte, daß es – ließ man zu allgemeine Objekte, eben die heute so genannten Fraktale, zu – unangenehme Überraschungen geben konnte und daß man sich deswegen besser auf die Untersuchung "vernünftiger" Mengen beschränkte.

Es folgen zwei berühmte Beispiele.

Beispiel 1: Die Koch–Kurve

Man denke sich einen Zeichner, der Streckenzüge auf Papier zeichnet. Wir geben ihm zwei Regeln auf:

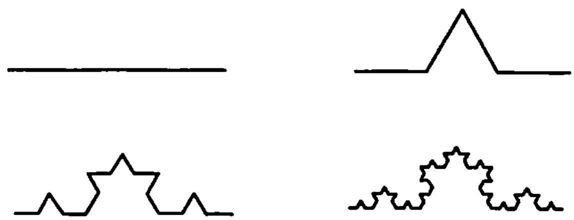
Regel 1: Nimm ein neues Blatt. Zeichne eine Strecke.

Regel 2: Nimm ein neues Blatt. Zeichne das eben gezeichnete Blatt ab, aber ersetze jeweils durch  .

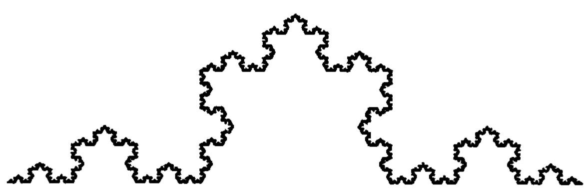
[88] I. Mathematisches Institut, Arnimallee 2 – 6, D – 1000 Berlin 33

Was wird passieren, wenn er zunächst Regel 1 befolgt, dann Regel 2, anschließend noch einmal Regel 2, noch einmal usw.?

Das wird passieren:



Irgendwann wird der Zeichner keine Lust mehr haben (z.B. bei Bild 6, weil die danach zu zeichnenden Strecken zu fein werden:

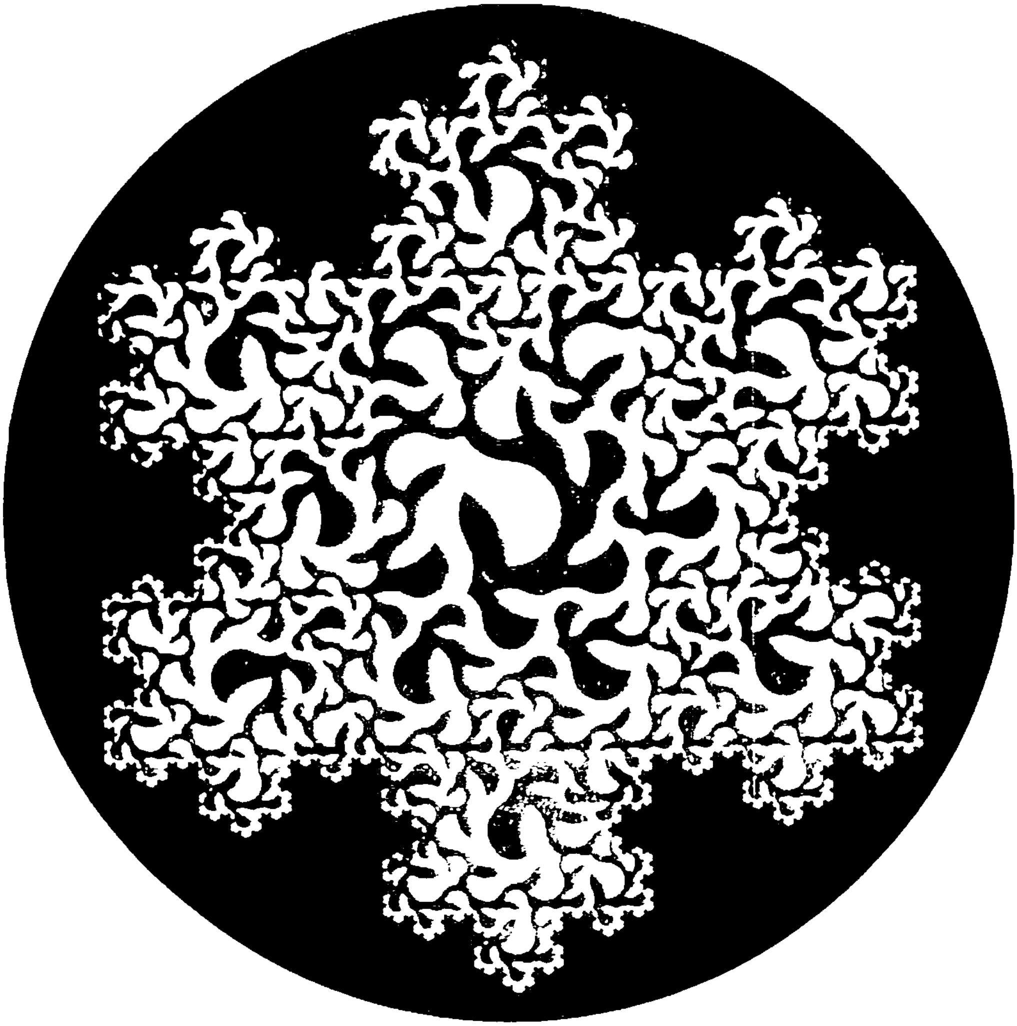


).

Wenn wir aber in Gedanken den Prozeß fortsetzen, so ergibt sich als Grenzfall ein Gebilde mit überraschenden Eigenschaften: die (nach dem Mathematiker H. von Koch benannte) *Koch-Kurve*.

Sie ist seit der Jahrhundertwende in vielen Mathematik-Büchern zu finden, zeigt sie doch, daß eine Kurve durchaus eine unendliche Länge haben kann (klar: in jedem Schritt nimmt die Länge um den Faktor $\frac{4}{3}$ zu).

[Übrigens: läßt man den Zeichner im ersten Bild mit einem gleichseitigen Dreieck beginnen, so ergibt sich durch wiederholte Anwendung von Regel 2 im Grenzfall die Koch-Insel (oder Koch-Schneeflocke):



An ihr ist bemerkenswert, daß sie eine endliche Fläche, gleichzeitig aber eine unendliche Berandung hat.]

Beispiel 2: Die Cantormenge

Sie wurde von Georg Cantor (dem Begründer der Mengenlehre) schon im vorigen Jahrhundert eingeführt. Er suchte eine Teilmenge der Geraden, die die folgenden scheinbar widersprüchlichen Eigenschaften gleichzeitig haben sollte:

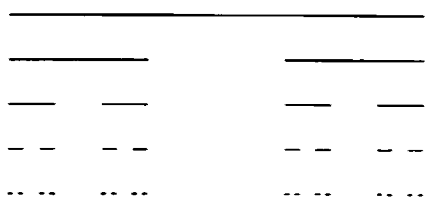
- es gibt keine Strecke mit mehr als einem Punkt in dieser Menge
- in beliebiger Nähe eines jeden Punktes dieser Menge befinden sich weitere Punkte
- ist x ein Punkt der Geraden, für den in beliebiger Nähe Punkte aus der Menge existieren, so gehört x schon zu der Menge.

[In der Sprache der Mathematik: Die Menge soll total unzusammenhängend, in sich dicht und abschlossen sein.]

Er fand sie in Analogie zu den vorigen Beispielen durch Vorgabe von zwei Regeln:

Regel 1: Zeichne eine Strecke
Regel 2: Ersetze jede Strecke ⊢————⊣
durch ⊢——⊣ ⊢——⊣ ,
d.h. entferne das mittlere Drittel.

Wendet man das uns schon bekannte Verfahren an (also Regel 1, Regel 2, Regel 2, ...), so ergibt sich hier:



Das im Grenzfall entstehende Gebilde heißt die *Cantor-Menge*. Sie spielte, wie gesagt, schon eine wichtige Rolle, lange bevor es Fraktale gab.

Man kann zeigen, daß die Cantormenge in gewisser Weise die einzige Menge mit den oben geforderten Eigenschaften ist: jeder kompakte Raum, der total unzusammenhängend und in sich dicht ist, ist zu ihr homöomorph.
Sie tritt in den verschiedensten Bereichen auf: z.B. dient sie als Beispiel dafür, daß eine Nullmenge durchaus überabzählbar sein kann; auch gibt sie ein geeignetes Modell ab, um das "Werfen einer Münze" in der Wahrscheinlichkeitstheorie zu modellieren (die Menge aller Folgen von Münzwürfen, versehen mit der punktweisen Konvergenz, ist zur Cantormenge homöomorph).

Neben den bisher vorgestellten Beispielen gab es noch eine Reihe ähnlicher Mengen, Konstruktionen und Phänomene, auf die wir hier nicht eingehen können.
Das Jahr 0 der eigentlichen Geschichte der Fraktale kam 1982, als B. Mandelbrot sein Buch "The Fractal Geometry of Nature" veröffentlichte.[90] (Bei Freeman and Company in San Francisco; genau genommen handelt es sich um eine Überarbeitung eines Manuskripts, das schon in den späten siebziger Jahren entstand.)
In diesem Buch wird der Begriff "Fraktal" geprägt, und es finden sich viele für dieses Gebiet fundamentale Ergebnisse. Am bemerkenswertesten ist aber die beim Lesen vermittelte Aufbruchstimmung, dem Entstehen einer alle Lebensbereiche betreffenden Theorie beizuwohnen, einer Theorie, die nach Meinung des Autors unsere Herangehensweise an

[90]Die deutsche Übersetzung erschien 1987 bei Birkhäuser.

die Erklärung von Naturphänomenen dramatisch verändern wird, ja so etwas wie einen Paradigmenwechsel im Sinne Th. Kuhns einleitet.
Inzwischen haben Fraktale eine Publizität erlangt, die nur ganz selten von mathematischen Begriffen erreicht wird. Dazu trug ganz wesentlich auch ihre ästhetische Komponente bei: mit Hilfe von leistungsfähigen Computern lassen sich aus Fraktalen wunderbare Bilder zaubern. (In diesem Zusammenhang ist die Gruppe von Herrn Peitgen zu erwähnen, der sogar so etwas wie Video-Reisen durch Fraktale berechnet hat.) Wie das genau gemacht wird, finden Sie weiter unten in Abschnitt 3.

Vorher versuchen wir zu klären:

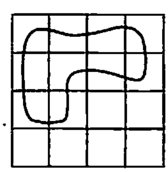
2. Was ist ein Fraktal?

Eine allgemein akzeptierte Definition gibt es meines Wissens nach nicht. Bei Mandelbrot steht zwar eine Erklärung, doch ist er selbst davon später wieder abgerückt. Daher sollen hier nur einige konkrete Beispielklassen von Fraktalen besprochen werden.

2.1 Die fraktale Dimension

Stellen Sie sich vor, Sie hätten ein quadratisches Blatt Papier und darauf irgendeine Figur A gezeichnet (eine Strecke, ein Quadrat, die Koch-Kurve, ...). Und nun teilen Sie jede Seite Ihres quadratischen Blattes in n gleiche Teile (n irgendeine natürliche Zahl), um durch Ziehen von Geraden das Blatt in n^2 kleine Karos zu zerlegen. Zählen Sie bitte die Karos, die Ihre Figur treffen und nennen Sie diese Zahl $N(n)$.

[Hier ein Beispiel:
(der Einfachheit halber habe ich, um mit einer Zeichnung auszukommen, n als Zweierpotenzen gewählt)



$n = 2 \; : \; N(2) = 3$
$n = 4 \; : \; N(4) = 10$
$n = 8 \; : \; N(8) = 24$
$\vdots$
]

Es ist offensichtlich, daß für eine Gerade A die Zahlen $N(n)$ wie n^1 wachsen und für ein Quadrat A wie n^2. Folglich ist es plausibel, den Exponenten von n im Wachstum von $N(n)$ als eine Art Dimension zu interpretieren (denn der Exponent ist 1 bei der eindimensionalen Linie und 2 bei der zweidimensionalen Fläche).
Wirklich definiert man:

> Gibt es eine Zahl D, so daß $N(n)$ wie n^D wächst, so nennt man D die *fraktale Dimension* der Figur A.

Längst nicht alle A haben eine fraktale Dimension. Für unsere uns schon bekannten Beispiele geht aber alles gut, und die fraktale Dimension läßt sich konkret berechnen:

$$\text{fraktale Dimension der Koch-Kurve} = \log 4/\log 3 \approx 1.26186$$

$$\text{fraktale Dimension der Cantor-Menge} = \log 2/\log 3 \approx 0.63095$$

Wir sind nun in der Lage, versuchsweise festzusetzen:

> Ein *Fraktal* ist eine Menge, für die die fraktale Dimension nicht–ganzzahlig ist (wie etwa die Koch–Kurve oder die Cantormenge).

Das reicht für viele Zwecke aus (jedenfalls, wenn man eine ganz ähnliche Konstruktion auch für Teilmengen von anderen Mengen als dem Quadrat durchführt). Da aber eigentlich nur "wenige" Mengen eine fraktale Dimension haben, führt man noch weitere "Dimensionen" ein, die jeweils eine eigene Fraktal–Definition nach sich ziehen (diejenigen Mengen heißen Fraktale, für die die jeweils betrachtete Dimension nicht–ganzzahlige Werte liefert). Am bekanntesten unter Mathematikern ist die Hausdorff–Besicovitch–Dimension, die durch eine Modifikation des hier vorgestellten Zugangs definiert wird.

> Die Definition ist leider recht technisch. Man geht aus von einer Teilmenge A eines metrischen Raumes; A soll so etwas wie eine Dimension zugeordnet werden.
> Dazu versuche man, für vorgelegte $\varepsilon > 0$ und $t > 0$ die Menge A so durch "kleine" Mengen $A_1, A_2, \cdots$ zu überdecken, daß
>
> $$(*) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} [\text{Durchmesser } (A_i)]^t$$
>
> möglichst klein wird. Dabei sind A_i's zugelassen, für die Durchmesser (A_i) $(= \sup \{d(x, y) \in A_i\})$ höchstens ε ist, und "möglichst klein" in $(*)$ soll bedeuten, daß das Infimum der in $(*)$ auftretenden Zahlen gemeint ist. Dieser Wert heiße $M(A, t, \varepsilon)$.
> Die Zuordnung $\varepsilon \longmapsto M(a, t, \varepsilon)$ ist offensichtlich fallend, und wir bezeichnen mit $M(A, t)$ den Limes für $\varepsilon \longrightarrow 0$ (also gerade das Supremum der $M(A, t, \varepsilon)$ für $\varepsilon > 0$).
> Und dann zeigt sich etwas Überraschendes: $M(A, t)$ nimmt praktisch nur die Werte ∞ und Null an. Genauer: Es gibt eine Zahl D, so daß $M(a, t) = \infty$ ist für $t < D$ und $M(A, t) = 0$ für $t > D$. Und *diese* Zahl heißt die ***Hausdorff–Besicovitch–Dimension*** von A.
> Dieses Vorgehen führt zu mathematisch weit befriedigenderen Resultaten als das zu Beginn dieses Abschnitts beschriebene. Es ist übrigens schon im zweiten Jahrzehnt dieses Jahrhunderts von Hausdorff eingeführt worden und an einem für die Maßtheorie fundamentalen Verfahren von Caratheodory motiviert (man braucht Caratheodorys Ergebnis in fast allen Fällen, wenn ein Maß eingeführt werden soll).

2.2 Fixpunktfraktale

Wir arbeiten wieder mit Blättern, legen uns nun aber einen Stapel von Overheadprojektorfolien zurecht.

Ausgangspunkt sind diesmal eine Reihe von Kopierautomaten $K_1, \ldots, K_n$. Man schiebt eine Folie hinein, der Automat verkleinert das Bild, dreht es eventuell, verschiebt es an eine andere Stelle und gibt das Ergebnis auf einer Folie aus (wobei Verkleinerungsfaktor, Drehwinkel und Verschiebung für jeden der Automaten feststehen). So etwa würde ein Automat arbeiten, der um $\frac{1}{2}$ verkleinert, um 90^0 nach links dreht und um 2 cm nach rechts oben verschiebt:

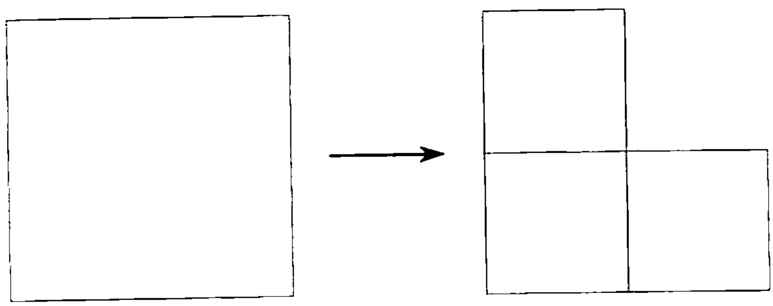
Und so einer, der nur auf ein Drittel verkleinert:

Es gibt schließlich noch einen Superautomaten K: die angelieferte Folie wird von dem Automaten $K_1, \ldots, K_n$ bearbeitet, die Ergebnisseiten werden übereinandergelegt und noch einmal kopiert.

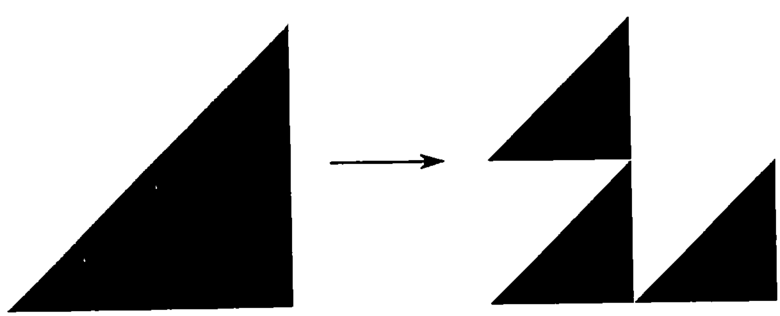
Bezeichne für irgendein Bild B das Produkt des Superautomaten mit $K(B)$. Und dann läßt sich etwas sehr merkwürdiges beobachten:
Egal, mit welchem Bild B man anfängt, wenn man B, $K(B)$, $K(K(B)), \ldots$ bildet (d.h. die aus K ausgegebene Folie immer wieder vorne hineinsteckt), so werden die Ergebnisse einem Gebilde immer ähnlicher, das nur von den Automaten abhängt, *nicht* aber von dem ersten Bild B.
Der "Grenzwert" soll das zum Automaten K gehörige *Fixpunktfraktal* F heißen ("Fixpunkt" deswegen, weil für F die Bedingung $K(F) = F$ erfüllt ist, d.h. F wird beim Kopiervorgang reproduziert).

Beispiel:

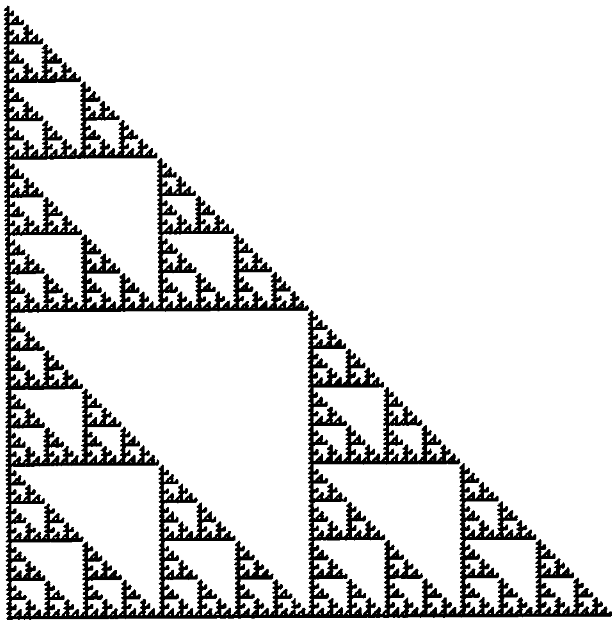
Wir nehmen an, daß es drei Automaten gibt, alle verkleinern auf $\frac{1}{2}$, K_2 verschiebt noch um $\frac{1}{2}$ nach rechts, K_3 um $\frac{1}{2}$ nach oben. Der Automat K arbeitet dann so:



oder, wenn wir mit einem Dreieck starten:



Als Grenzwert erhalten wir ein ebenfalls ziemlich berühmtes Fraktal, die *Sierpinskimenge*:



Übrigens entstehen auch die uns schon bekannten Fraktale (Koch–Kurve, Cantormenge) als Fixpunktfraktale geeigneter Automaten.
Fixpunktfraktale sind sicher die mit Abstand am besten untersuchten Fraktale. Man kann für sie mit einer einfachen Formel die fraktale Dimension ausrechnen, und viele im Zusammenschang mit Fraktalen wichtige Begriffe wurden zuerst an ihnen studiert.

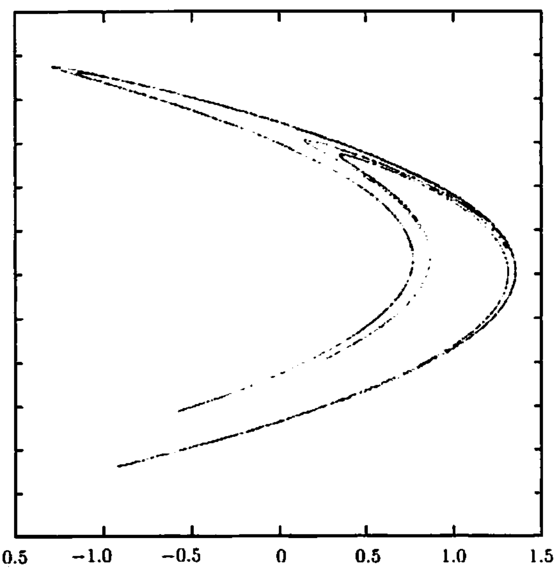
Bei der sauberen Behandlung dieser Begriffe spielt übrigens der Name Hausdorff ebenfalls eine wichtige Rolle.
Wir gehen aus von einem kompakten metrischen Raum (M, d); man denke etwa an das Einheitsquadrat. Bezeichne mit $\mathcal{K}$ das System aller nicht–leeren abgeschlossenen Teilmengen von $\mathcal{K}$ und erkläre für $A, B \in \mathcal{K}$ einen "Abstand" zwischen A, B als die kleinste Zahl ε, für die gilt: für jedes $x \in A$ gibt es ein $y \in B$ mit $d(x, y) \leq \varepsilon$ und umgekehrt (d.h. für $y \in B$ existiert $x \in A$ mit $d(x, y) \leq \varepsilon$).
Der so ermittelte Wert heißt *Hausdorff–Abstand* zwischen A und B und wird mit $d_H(A, B)$ bezeichnet. d_H spielt eine wichtige Rolle, ist es doch damit möglich zu sagen, ob z.B. zwei Bilder "nahe beieinander" sind, eine Frage, die etwa in der Computergraphik von Bedeutung ist.
Versieht man $\mathcal{K}$ mit d_H, so entsteht wieder ein vollständiger metrischer Raum. Folglich hat jede Kontraktion auf $\mathcal{K}$ nach dem Banachschen Fixpunktsatz genau einen Fixpunkt, und *das* liefert den Hintergrund zum vorher beschriebenen Vorgehen: unsere "Bilder" sind die Elemente aus $\mathcal{K}$ und der "Superautomat" entspricht einer Kontraktion auf $\mathcal{K}$. Daß der Fixpunkt durch immer wieder iterierte Anwendung des "Superautomaten" aus beliebigen Anfangsbildern gewonnen werden kann, ist ebenfalls in der Aussage des Banachschen Fixpunktsatzes enthalten.

3. Wo treten Fraktale auf?

Wir betrachten hier nur einige wenige ausgewählte Bereiche, zunächst zwei aus der Mathematik.

Chaostheorie

Hier müssen wir sehr oberflächlich bleiben. Unter einem *dynamischen System* stelle man sich eine Vorschrift vor, nach der sich ein Punkt auf Kurven im Raum bewegt, und zwar soll zu jedem Startpunkt eine eigene Kurve gehören. Eine Menge, der er im Laufe seiner Entwicklung immer näher kommt, heißt ein *Attraktor*. In der Chaostheorie werden dynamische Systeme betrachtet, bei denen die Bahnen des Punktes sehr unregelmäßig sind. Trotzdem gibt es in vielen Fällen immer noch Attraktoren, die allerdings recht "zerklüftet" aussehen. Hier ein Beispiel, der Hénon–Attraktor:



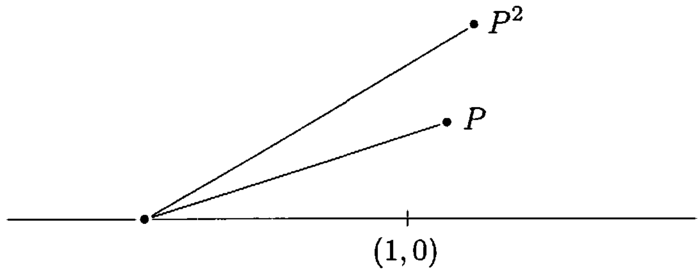
Attraktoren dieses Typs heißen *seltsame Attraktoren* (strange attractors). In praktisch allen wichtigen Situationen ist man zur Veranschaulichung auf Computersimulation angewiesen. Deswegen ist - obwohl die fraktale Struktur meist offensichtlich ist - in so gut wie keinem Fall streng nachprüfbar, inwieweit wirklich Fraktale vorliegen.
Fixpunktfraktale sind nicht zu erwarten, doch wäre die Beantwortung vieler anderer Fragen, z.B. die nach der fraktalen Dimension, interessant.

3.2 Juliamengen und die Mandelbrotmenge

Jetzt kommen wir zu den Fraktalen, die zu den bekannten attraktiven Bildern Anlaß geben.

Als *Vorbereitung* müssen wir eine einfache Operation kennenlernen, die jedem Punkt der Ebene einen weiteren Punkt zuordnet:

Ist P irgendein Punkt, so soll P^2 derjenige sein, der entsteht, wenn man den Winkel mit der positiven Richtung der x–Achse verdoppelt und den Abstand zum Nullpunkt quadriert. (Für Kenner: das ist gerade das Quadrieren komplexer Zahlen).



Mit Hilfe dieser Operation können wir nun durch immer wiederholte Anwendung Punktfolgen erzeugen.

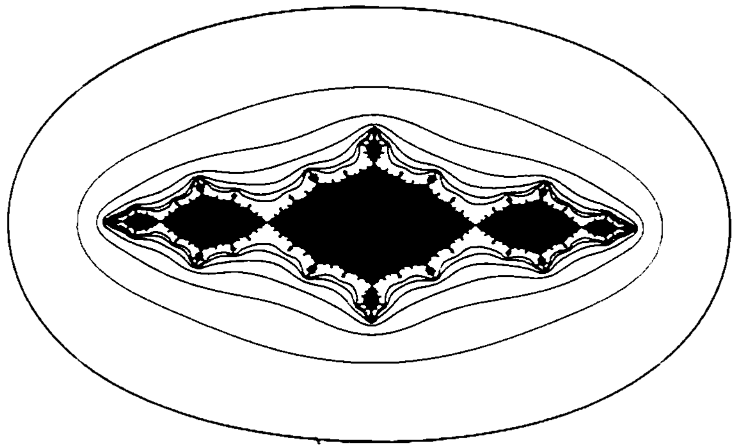
Genauer: Sei C ein fest gewählter Punkt der Ebene.
Definiere dann eine Punktfolge $P_0, P_1, P_2, \ldots$
durch
P_0 = irgendein frei gewählter Punkt
$P_1 := (P_0)^2 + C$
("+" soll Vektoraddition bedeuten)
$P_2 := (P_1)^2 + C$
$P_3 := (P_2)^2 + C$

Je nachdem wie wir angefangen haben, d.h. welche P_0 wir uns ausgesucht haben, wird die Folge ein sehr unterschiedliches Verhalten zeigen (das mache man sich für verschiedene P_0 im Spezialfall $C = (0,0)$ klar).

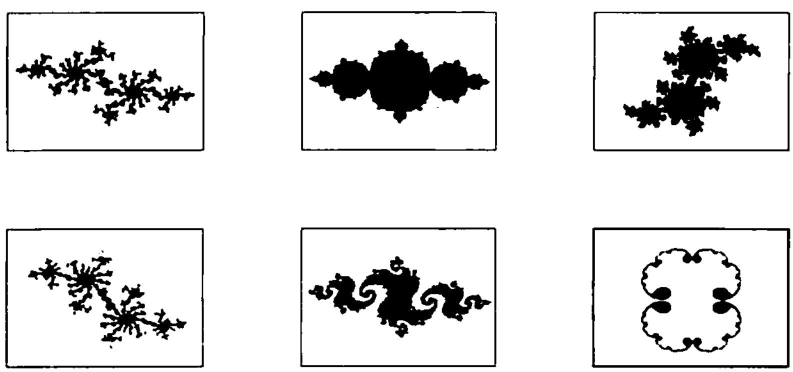
Hier interessiert nur, ob die Folge beschränkt bleibt oder nicht. Unter der zu C gehörigen *Julia–Menge*[91] versteht man die *Gesamtheit derjenigen* P_0, *die zu beschränkten Folgen* $P_0, P_1, \ldots$ *führen.* Für $C = (0,0)$ ist das (offensichtlich) die Einheitskreisscheibe, für andere C kann das beliebig kompliziert aussehen. Hier als Beispiel die Juliamenge, die zu

[91] benannt nach dem französischen Mathematiker Julia, der derartige Mengen zu Beginn dieser Jahrhunderts untersuchte

$C = (-1.1, 0)$ gehört:



(Die Julia–Menge ist hier die schwarz gezeichnete zerklüftete Menge innerhalb der geschlossenen Linien; diese Linien verbinden Punkte, die nicht dazugehören, für die aber die Divergenz der Folge $P_0, P_1, P_2, \ldots$ gleich schnell erfolgt).
Und hier einige weitere Beispiele:



Juliamengen sind fast stets "zerklüftet" und damit Kandidaten für Fraktale. Auffällig ist, daß trotz der großen Vielfalt in Abhängigkeit von C nur zwei Typen auftreten. Entweder ist die Juliamenge zu C zusammenhängend (man kann sie also nicht in zwei getrennte Inseln zerlegen), oder sie besteht wie eine Art Staubwolke aus einzelnen Punkten, von denen sich niemals zwei verschiedene innerhalb der Menge verbinden lassen. So etwas wie eine aus zwei Kreisen bestehende Menge kommt also garantiert nicht vor.
Das wurde schon vor über 70 Jahren von Julia und Fatou streng bewiesen. Von ihnen stammt auch das Ergebnis, daß sich die Frage nach dem Typ der zu C gehörigen Juliamenge leicht bestimmen läßt: Ist die mit $P_0 = (0, 0)$ beginnende Folge beschränkt, gehört also $(0, 0)$ zur Julia-Menge von C, so ist sie notwendig zusammenhängend. Für alle anderen C ist sie "sehr unzusammenhängend".

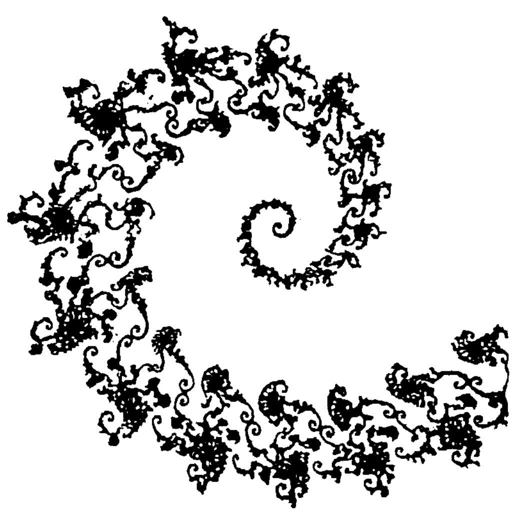
Und damit sind wir endlich bei der *Mandelbrot-Menge* M: Sie besteht aus all denjenigen C, für die

$$P_0 := (0,0)\,,\quad P_1 := (P_0)^2 + C\,,\quad P_2 := (P_1)^2 + C\,,\ldots$$

beschränkt ist, für die also die zu C gehörige Juliamenge zusammenhängend ist.
M sieht so aus:

Und manch einer wird sich jetzt fragen, wo die interessanten Bilder bleiben. Die entstehen aus der Menge M durch drei Verfahren:

1. Ausschnittvergrößerung, z.B.



2. Färbung: Die *nicht* zu M gehörigen Punkte sind doch diejenigen, für die eine gewisse Folge unbeschränkt ist. Man kann nun all diejenigen, die zu "gleich schnell" divergierenden

Folgen führen, mit der gleichen Farbe kennzeichnen. Der Phantasie und dem Spieltrieb sind dabei (genügend leistungsfähige Computer vorausgesetzt) keine Grenzen gesetzt.

3. Verzerrung: Man kann durch eine verzerrende Abbildung die interessanten Stellen noch einmal vergrößern.

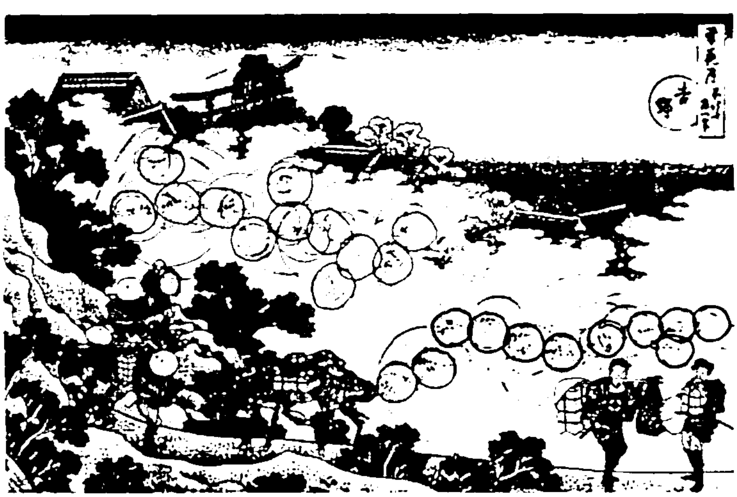
Und *so* erzeugt man mit recht beträchtlichem Aufwand und mit viel Versuch – und – Irrtum die schönsten Fraktalbilder.

3.3 Fraktale im außermathematischen Bereich

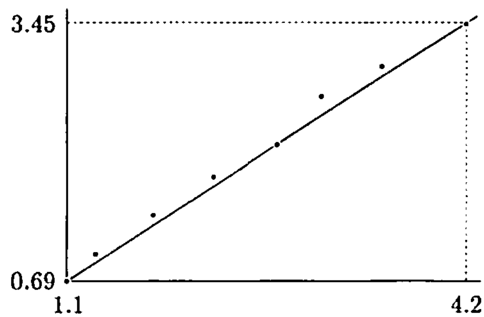
Das wird in Mandelbrots Buch sehr ausführlich behandelt. Wirklich treten bei der Untersuchung von Naturvorgängen häufig "irgendwie zerklüftete" Gebilde auf, und manche Phänomene erinnern an Sachverhalte, die beim Studium der Fraktale ebenfalls anzutreffen sind. So z.B. die *Selbstähnlichkeit.* Die Fixpunktfraktale haben doch die Eigenschaft, daß aus jedem noch so kleinen Ausschnitt des Fraktals das gesamte Fraktal rekonstruiert werden kann. Und im außermathematischen Bereich gibt es ähnliche Phänomene:

> Machen Sie ein Foto, dann eine Ausschnittsvergrößerung. Wenn Sie dann Mühe haben zu sagen, welches das Original und welches die Ausschnittsvergrößerung war, so haben Sie es wahrscheinlich mit einem leibhaftigen Fraktal zu tun.
>
> Schöne Beispiele finden sich bei Bäumen, Küstenlinien, Bergsilhouetten, aufgewühltem Meer, Wolken, verrauschten Signalen usw.
>
> Ein anderer Test besteht darin, daß Sie bei fraktalen Strukturen Mühe haben, die Entfernung einzuschätzen (aus dem gleichen Selbstähnlichkeitsgrund wie eben).

Hier noch zwei Beispiele, warum Fraktale auch für konkrete naturwissenschaftliche Anwendungen von Interesse sein können. Dazu gehen wir von irgendeinem "irgendwie fraktalen" Bild aus, etwa der Staubwolke im folgenden Holzschnitt:



Wir versuchen dann experimentell, die fraktale Dimension zu bestimmen, berechnen also für "nicht zu große n" die Zahlen $N(n)$ gemäß 2.1.
Und wenn es dann ein D gibt, so daß $N(n)$ wie n^D wächst, so könnten wir D als *experimentelle fraktale Dimension* unseres Bildes bezeichnen.
(Das D erhält man übrigens als Steigung einer Geraden durch die Punkte $(\log n, \log N(n))$; im Beispiel sieht die Gerade so aus:



und wir erhalten $D \approx 1.2$).
Was hier nur eine Spielerei zu sein scheint, hat schon technische Anwendungen gefunden, um etwa verschiedene Molekülverbindungen mit Computerhilfe unterscheiden zu können, bei Prozessen, bei denen sich kristalline Strukturen bilden usw.

Und dann sollte noch betont werden, daß eine fraktale Beschreibung mitunter eine gewaltige *Komprimierung von Information* darstelle. Es ist viel leichter, den Aufbau des Automaten zur Erzeugung des Sierpinski–Dreiecks zu speichern als das Sierpinski–Dreieck selber. Oder: man braucht zur Erzeugung der Koch–Kurve nur zwei Regeln zu kennen, eine punktweise Abtastung (etwa mit einem Fax–Gerät) wäre viel aufwendiger. Und *das* gibt einem natürlich die Hoffnung, daß man bisher unverstandenen fraktalen Strukturen ihr Geheimnis durch Finden eines Bildungsgesetzes entreißen könnte. Wie weiß z.B. unser Organismus, wie er so komplizierte Dinge wie das Lungen- oder das Nierensystem erzeugen soll? Die DNS ist viel zu kurz, mehr als gewisse Regeln können nicht enthalten sein. Doch welche, und wie funktioniert der Mechanismus? Meines Wissens nach gibt es in dieser Richtung aber noch keine durchschlagenden Erfolge.

4. Sind Fraktale wichtig?

Nach dem Motto: "Man sieht nur, was man weiß" haben uns Fraktale wirklich in vielen Bereichen die Augen geöffnet. In der Mathematik hat die Theorie insofern eine Änderung bewirkt, als – wieder einmal – die Einschätzung dessen, was "interessant" und "vernünftig" ist, modifiziert werden mußte. Andererseits klafft meiner Meinung nach eine gewaltige Lücke zwischen dem, was man exakt über Fraktale weiß und dem, was man für eine mehr

als nur qualitative oder experimentelle Anwendung auf außermathematische Phänomene wissen müßte.
Und selbst das, was man präzise weiß, betrifft meist nur besonders einfache Situationen. Wirklich gut z.B. kennt man nur die Fixpunktfraktale, bei Juliamengen geht es um Iterationen der einfachsten (nichtlinearen) Zuordnung, und schon die Mandelbrot-Menge bietet Anlaß zu einer Fülle offener Fragen.
Deswegen kann vorläufig nur allergrößte Vorsicht angeraten werden, wenn – wie mitunter von Fraktal-Enthusiasten zu hören – Fraktale als das einzig angemessene Instrument der Naturbeschreibung hochstilisiert werden und die vor-fraktale Mathematik als Irrweg hingestellt wird.

Literatur

BARNSLEY, M.: *Fractals Everywhere.* Academic Press, Boston 1988.

EDGAR, G.A.: *Measure, Topology and Fractal Geometry.* Springer Verlag, New York 1990.

FALCONER, K.: *Fractal Geometry.* Wiley & Sons, Chichester 1990.

MANDELBROT, B.: *Die fraktale Geometrie der Natur.* Birkhäuser, Basel 1987.

PEITGEN, H.-O, RICHTER, P.-H.: *The Beauty of Fractals.* Springer Verlag, New York 1986.