Vorlesungen zum Gedenken an Felix Hausdorff
E. Eichhorn, E. J. Thiele (Hrsg.)

171–190

Die Theorie der Kontinua - ein Gebiet, in dem die Anschauung teilweise versagt

Werner Gähler[87]

An den Anfang dieses Beitrages sei ein Zitat aus dem berühmten 1914 erschienenen Lehrbuch von FELIX HAUSDORFF „Grundzüge der Mengenlehre" ([29]) gestellt. Dieses Zitat bezieht sich einerseits direkt auf die Mengenlehre, andererseits aber auch auf die allgemeine Topologie. Es lautet:

> ... in einem Gebiet, wo schlechthin nichts selbstverständlich und das Richtige häufig paradox, das Plausible falsch ist, gibt es außer der lückenlosen Deduktion kaum ein Mittel, sich und den Leser vor Täuschungen zu bewahren.

In der Theorie der Kontinua, auf die im folgenden eingegangen wird, tritt das Phänomen, daß die Anschauung versagt, teilweise recht drastisch auf. Diese Theorie ist im besonderen Maße geometrisch, so daß im allgemeinen eine starke Anschaulichkeit vorhanden ist. Das Versagen bezieht sich nun einerseits auf die Erwartung von Aussagen, was in der Regel auf eine ungeeignete Vorstellung der benutzten Begriffe zurückzuführen ist. In nicht wenigen Fällen bleibt aber auch nach strenger mathematischer Herleitung, deren Richtigkeit auf keinen Fall angezweifelt wird, ein gewisses Unbehagen zurück. Es betrifft das Unvermögen, die betreffende Herleitung voll anschaulich nachzuvollziehen. Häufig handelt es sich dabei um Grenzprozesse.

Die Theorie der Kontinua hat HAUSDORFF in seine 1927 erschienene „Mengenlehre" ([30]) aufgenommen. Der von ihm benutze Begriff des Kontinuums ist allerdings allgemeiner als der jetzt übliche, wenn man davon absieht, daß die in HAUSDORFFs Buch benutzten topologischen Begriffe - von einigen Anmerkungen abgesehen - lediglich für metrische Räume ausgesprochen sind. Eine derartige Beschränkung auf metrische Räume ergab sich bedauerlicherweise auf Grund der notwendigen Umfangseinschränkung im Vergleich zu seinem 1914 erschienenen Buch [29]. Auf sie weist HAUSDORFF im Vorwort seiner „Mengenlehre" hin.

Nach HAUSDORFF ist ein *Kontinuum* eine abgeschlossene und zusammenhängende Menge. Heute versteht man unter einem **Kontinuum** speziell eine kompakte und zusammenhängende Teilmenge eines topologischen Raumes, der dem zweiten Trennungsaxiom genügt. Dieses Trennungsaxiom besagt, daß voneinander verschiedene Punkte des Raumes disjunkte Umgebungen besitzen.

[87] Universität Potsdam, Fachbereich Mathematik, Am Neuen Palais 10, Postfach 601553, D 14415 Potsdam, Germany

HAUSDORFF hat in seinem 1914 erschienenen Buch topologische Räume eingeführt, wobei er den Umgebungsbegriff zur Grundlage nahm. Abgesehen von einer gewissen Einschränkung stammt somit der Begriff des topologischen Raumes von ihm. Genau genommen beschreibt HAUSDORFF in [29] die Topologien durch Vorgabe von Umgebungsbasen, wobei er lediglich offene Umgebungen betrachtet. In Kapitel VIII von [29] geht er dann auf die Äquivalenz von Umgebungsbasen ein. HAUSDORFF forderte von vornherein das zweite Trennungsaxiom, das allerdings später in der allgemeinen Definition des Topologiebegriffes weggelassen wurde. Topologische Räume, die diesem Trennungsaxiom genügen, werden heute HAUSDORFF zu Ehren als **Hausdorffräume** bezeichnet. Eine Abschwächung des Umgebungsbegriffs, mit der auch nicht offene Umgebungen zugelassen sind, nahm FRÉCHET 1928 in seiner Arbeit [18] vor.

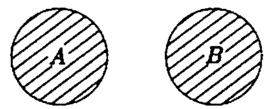
1922 schlug KURATOWSKI ([38]) eine andere Definition des Topologiebegriffs vor, die zu der HAUSDORFFschen Definition äquivalent ist und bei der der **abgeschlossene Hüllenoperator** vorgegeben ist. Dieser ordnet jeder Teilmenge A des Raumes die Menge $\overline{A}$ aller ihrer Berührpunkte zu. Eine Menge A heißt **abgeschlossen**, wenn sie alle ihre Berührpunkte enthält, also $\overline{A} = A$ gilt. Die Komplemente der abgeschlossenen Mengen sind die **offenen** Mengen. Eine Menge ist genau dann offen, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist. Auf eine jetzt häufig benutzte äquivalente Definition des Begriffs des topologischen Raumes, bei der die offenen Mengen axiomatisch vorgegeben sind, hat als erster TIETZE 1923 in [56] hingewiesen.

Das Wort **Topologie** wurde übrigens zum ersten Male bereits 1847 benutzt, und zwar von E. LISTING, einem Schüler von GAUSS. Er schrieb eine Arbeit mit dem Titel „Vorstudien zur Topologie“, die in Richtung Graphen- und Knotentheorie ging. Der Name Topologie hat sich aber erst in diesem Jahrhundert durchgesetzt.

Nochmals zu den Kontinua-Definitionen. Sicher hat auch die HAUSDORFFsche Definition etwas für sich. In seinem Sinne sind zum Beispiel die Geraden Kontinua, im heutigen Sinne sind sie es nicht. Der Grund, weshalb sich die Bezeichnung für den heutigen Begriff durchgesetzt hat, liegt sicher mit daran, daß sich für ihn mehr abgerundete Ergebnisse erzielen lassen. Wir gehen darauf in einem Beispiel noch genauer ein. Im weiteren soll die Bezeichnung Kontinuum im jetzt üblichen Sinne verwendet werden.

Wir wollen als nächstes auf die Begriffe „zusammenhängend“ und „kompakt“ zu sprechen kommen.

In HAUSDORFFs 1914 erschienenem Lehrbuch ([29]) wurde zum ersten Male ein systematisches Studium des Begriffs des Zusammenhanges durchgeführt. Eine Teilmenge eines topologischen Raumes heißt **zusammenhängend**, wenn sie - als Teilraum - nicht in zwei disjunkte, nicht leere, abgeschlossene Mengen A und B zerlegt werden kann.



$A \cup B$ nicht zusammenhängend

Abb. 1

Häufig stellt man sich unter einer zusammenhängenden Menge eine bogenweise zusammenhängende Menge vor, was im allgemeinen nicht richtig ist.

Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes heißt **bogenweise zusammenhängend**, wenn es für beliebige Punkte a und b von A einen in A liegenden **Weg** gibt, der a mit b verbindet, wenn also eine stetige Abbildung w des Zahlenintervalles $[0, 1]$ in A mit $w(0) = a$ und $w(1) = b$ existiert.

Jede bogenweise zusammenhängende Menge ist zusammenhängend. Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht. Eine zusammenhängende, nicht bogenweise zusammenhängende Teilmenge M der Ebene ist zum Beispiel die folgende Menge

$$M = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 \mid x = 0,\ -1 \leq y \leq 1 \text{ oder } 0 < x,\ y = \sin \frac{1}{x}\}.$$

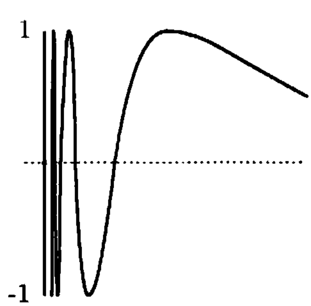


Abb. 2

Ein interessantes Beispiel einer bogenweise zusammenhängenden Menge stellt nach HAUSDORFF ([29]) die Menge aller irrationalen Punkte der Ebene (mindestens eine der Koordinaten ist irrational) dar. Da die Menge der rationalen Punkte abzählbar ist, gibt es zu einem fest vorgegebenen Punkt a nur abzählbar viele Geraden, die a mit einem beliebigen rationalen Punkt verbinden. Es gibt damit zu zwei voneinander verschiedenen irrationalen Punkten a und b mindestens zwei Geraden, die durch a beziehungsweise b verlaufen, sich in einem irrationalen Punkt c treffen und ganz aus irrationalen Punkten bestehen (siehe Abb. 3).

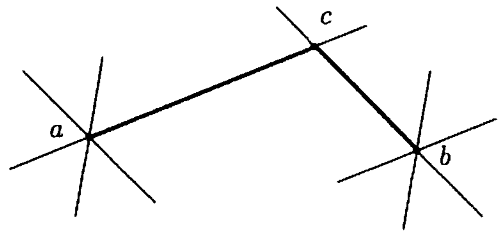


Abb. 3

Eine wichtige Modifikation des Begriffs des Zusammenhangs erhält man mit dem lokalen Zusammenhang.

Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes heißt **lokal zusammenhängend in einem Punkt** a von A, wenn es eine Umgebung U von a gibt, so daß $A \cap U$ zusammenhängend ist. Die Menge A heißt **lokal zusammenhängend**, wenn sie in jedem ihrer Punkte lokal zusammenhängend ist.

Ein **Beispiel** einer zusammenhängenden, nicht lokal zusammenhängenden Menge liefert die oben definierte Menge M (siehe Abb. 2). Sie ist nicht lokal zusammenhängend in den Punkten (x, y) von M mit $x = 0$.

Offensichtlich gibt es auch lokal zusammenhängende Mengen, die nicht zusammenhängend sind, etwa die Vereinigung zweier punktfremder abgeschlossener Kreisscheiben in der Ebene (siehe Abb. 1).

Nun zur Kompaktheit.

In seinen „Grundzügen der Mengenlehre" ([29]) benutzt HAUSDORFF einen auf MAURICE FRÉCHET ([17]) zurückgehenden Kompaktheitsbegriff. In diesem Sinne kompakte topologische Räume werden jetzt als abzählbar kompakt bezeichnet. Ein topologischer Raum heißt demnach **abzählbar kompakt**, wenn sich aus jeder abzählbaren offenen Überdeckung eine endliche Überdeckung herausgreifen läßt.

Es war ein längerer Entwicklungsprozeß in der Mathematik, bis man feststellte, daß Abzählbarkeitsforderungen in gewissen Fällen mehr Komplikationen als Vereinfachungen bringen. FRÉCHET unternahm in seiner 1906 veröffentlichten Dissertation [17]) zwei wichtige Versuche, topologische Strukturen axiomatisch zu erfassen. Einerseits führte er auf axiomatischem Wege Folgenkonvergenz ein, indem er sogenannte **$\mathcal{L}$-Räume** definierte, die sich aber als unbefriedigend erwiesen. Ganz anders verhielt es sich mit dem anderen von ihm eingeführten Raumbegriff, dem des **metrischen Raumes**. Dieser besitzt ohne Zweifel eine fundamentale Bedeutung. Der Name metrischer Raum stammt übrigens von HAUSDORFF. FRÉCHET selbst benutzte für „metrischer Raum" zuerst die Bezeichnung *classe* (E), später *classe* (D), wobei die Buchstaben E und D von den französischen Bezeichnungen für Entfernung *écart* und *distance* hergeleitet sind.

Was nun die Kompaktheit betrifft, so waren es die russischen Mathematiker ALEXANDROFF und URYSOHN, die als erste in einer 1923 angefertigten Arbeit ([4]), die allerdings erst 1929 nach Erscheinen von HAUSDORFFs „Mengenlehre" veröffentlicht wurde, erkannt haben, welcher Kompaktheitsbegriff für topologische Räume der geeignetste ist. Für diesen wurde übrigens damals und wird teilweise auch noch heute die Bezeichnung **bikompakt** verwendet. Ein topologischer Raum ist in diesem Sinne **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung des Raumes eine endliche Überdeckung enthält. Diese Kompaktheitseigenschaft trat übrigens schon im klassischen **Borelschen Überdeckungssatz** ([5]) auf. Er besagt gerade, daß jede beschränkte abgeschlossene Teilmenge eines euklidischen Raumes kompakt in diesem Sinne ist. Natürlich gilt in euklidischen Räumen auch die Umkehrung, sind also kompakte Teilmengen beschränkt und abgeschlossen. Im folgenden wird „kompakt" stets im eben angegebenen Sinne benutzt. Für diesen Begriff konnte Tychonoff ([57]) im Jahre 1929 seinen berühmten Satz beweisen, daß jedes Produkt kompakter topologischer Räume wieder kompakt ist. Ferner erwies dieser Kompaktheitsbegriff seine Leistungsfähigkeit bei der **Čech-Stone-Kompaktifizierung**, die unabhängig von Čech ([9]) und Stone ([54]) im Jahre 1937 eingeführt wurde. Bourbaki ([6]) spricht übrigens von Kompaktheit nur, wenn zusätzlich das zweite Trennungsaxiom erfüllt ist. Kompakt in unserem Sinne nennt er **quasikompakt**. Teilweise folgt man heute auch der Bourbakischen Bezeichnungsweise.

Abzählbar kompakt ist schwächer als kompakt. Für topologische Räume, die dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügen, deren Topologien also eine abzählbare Basis besitzen, fallen allerdings beide Begriffe zusammen. Da insbesondere jeder abzählbar kompakte metrische Raum dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt, sind diese Begriffe für metrische Räume äquivalent (siehe Abb. 4).

$$\text{kompakt} \quad \underset{\substack{\text{unter 2. Abzählbarkeitsaxiom} \\ \text{und damit für metrische Räume}}}{\overset{\longrightarrow}{\dashleftarrow}} \quad \text{abzählbar kompakt}$$

Abb. 4

Das zweite und ebenfalls das erste Abzähbarkeitsaxiom treten übrigens erstmalig in Hausdorffs Lehrbuch [29] auf. In seiner „Mengenlehre" [30] formuliert Hausdorff Kompaktheit als Folgenkompaktheit. Ein topologischer Raum heißt **folgenkompakt**, wenn jede Punktfolge in diesem Raum eine konvergente Teilfolge besitzt. Da sich Hausdorff aber auf metrische Räume beschränkt, ist die Folgenkompaktheit keine Einschränkung. Hausdorff weist übrigens in seiner „Mengenlehre" selbst die Äquivalenz von Folgenkompaktheit und „richtiger" Kompaktheit für metrische Räume nach.

Allgemein zieht die Folgenkompaktheit die abzählbare Kompaktheit nach sich und sind beide Begriffe für topologische Räume äquivalent, die – wie die metrischen Räume – dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügen (siehe Abb. 5).

$$\text{folgenkompakt} \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \dashleftarrow \\ \scriptstyle\text{unter 1. Abzählbarkeitsaxiom} \\ \scriptstyle\text{und damit für metrische Räume} \end{array} \quad \text{abzählbar kompakt}$$

Abb. 5

Für metrische Räume sind also alle drei Kompaktheitsbegriffe äquivalent.
Im weiteren führen wir eine Aussage an, die für Kontinua im heutigen Sinne, aber nicht für solche im HAUSDORFFschen Sinne gilt.

Satz. *Stetige Bilder von Kontinua sind Kontinua.*

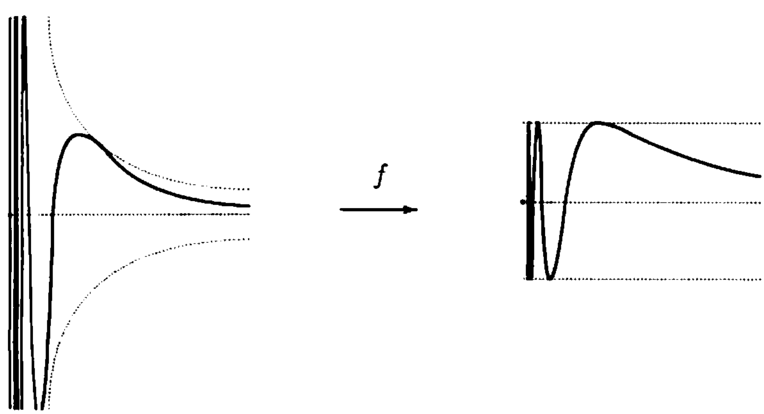
Daß die entsprechende Aussage für Kontinua im HAUSDORFFschen Sinne, also für abgeschlossene zusammenhängende Mengen, im allgemeinen falsch ist, hat übrigens schon HAUSDORFF in [29] (im Anhang) am folgenden **Beispiel** gezeigt:
Es sei

$$M = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 \mid x = 0, y \in \mathrm{R} \text{ oder } x > 0,\ y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}\}$$

und $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$ die Abbildung mit $f(x, y) = (x, xy)$. M ist abgeschlossen und zusammenhängend, das stetige Bild

$$f[M] = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 \mid x = y = 0 \text{ oder } x > 0,\ y = \sin \frac{1}{x}\}$$

ist zwar zusammenhängend, jedoch nicht abgeschlossen (siehe Abb. 6).



M zusammenhängend und abgeschlossen   *f*[*M*] zusammenhängend, aber nicht abgeschlossen

Abb. 6

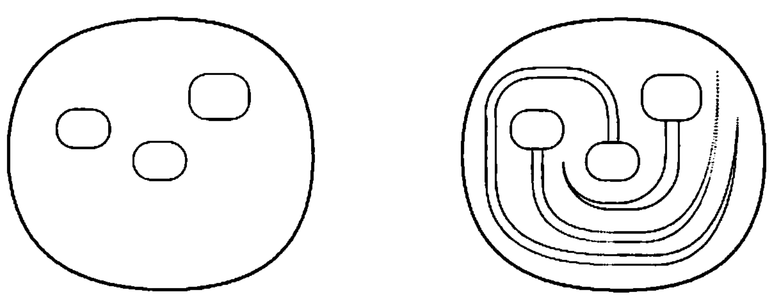
Eine für Anwendungen wichtige Aussage über Kontinua bringt der folgende

Satz. *Eine absteigende Folge $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ von (nichtleeren) Kontinua hat als Durchschnitt $D = \bigcap A_i$ ein (nichtleeres) Kontinuum.*

Im Sinne des abgeschlossenen Limes, einem von HAUSDORFF in [29] eingeführten Konvergenzbegriff für Mengen, konvergiert die Folge $A_1, A_2, \ldots$ gegen D. Es sei daran erinnert, daß dieser wichtige Begriff der Mengenkonvergenz wie folgt definiert ist: Als **unteren abgeschlossenen Limes** einer Folge $A_1, A_2, \ldots$ von Teilmengen eines topologischen Raumes versteht man die Menge aller Punkte x des Raumes, für die zu jeder Umgebung U der Durchschnitt $U \cap A_n$ für fast alle n nicht leer ist. Der **obere abgeschlossene Limes** ist entsprechend definiert, wobei lediglich „für fast alle n" durch „für unendlich viele n" ersetzt ist. Stimmen unterer und oberer abgeschlossener Limes überein, so heißt diese Menge der **abgeschlossene Limes** von $A_1, A_2, \ldots$.

Eine interessante Folgerung des obigen Satzes besagt, daß es in der Ebene Kontinua gibt, die gleichzeitig Rand von mehr als zwei ebenen punktfremden, einfach zusammenhängenden Gebieten sind. Wir illustrieren das an einem Beispiel. Ein **Gebiet** ist natürlich eine offene und zusammenhängende Menge. Es heißt **einfach zusammenhängend**, wenn sich in ihm jede geschlossene Kurve stetig zu einem Punkt zusammenziehen läßt.

Beispiel. Wir beschreiben den Sachverhalt anschaulich. Ausgangssituation sei eine Insel mit drei Seen, die keine Verbindung miteinander haben. Natürlich verstehen wir unter der Insel und den Seen einfach zusammenhängende Gebiete im $\mathbf{R}^2$, wobei die Seen einschließlich ihrer Berandungen paarweise punktfremd sind und auch mit der Inselberandung keine Punkte gemeinsam haben. In einem ersten Schritt wird jeder der Seen durch Anlegen eines Kanals so erweitert, daß man wieder drei einfach zusammenhängende Gebiete mit den gleichen Eigenschaften wie die vorgegebenen Seen erhält (siehe Abb. 7). Die Kanäle werden in weiteren Schritten mehr und mehr verlängert, so daß die sich jeweils ergebenden drei Gebiete zu jedem Punkt des übrigen Teils der Insel einen immer kleineren Abstand haben.



Ausgangssituation — Nach dem ersten Schritt

Abb. 7

Diese Schritte werden beliebig abzählbar fortgesetzt (was mathematisch, aber natürlich nicht praktisch geht).

Nach Grenzübergang (Durchschnitt) ergibt sich der nicht mit Wasser ausgefüllte Teil der Insel als ein Kontinuum, das Rand jedes der drei entstandenen einfach zusammenhängenden Gebiete ist. Dieser Übergang erfolgt im Sinne des obigen Satzes; er bereitet anschaulich Probleme.

Das Beispiel läßt sich folgendermaßen zu dem von P. S. ALEXANDROFF in [3] (Seite 170) angegebenen Beispiel einer Berandung erweitern. Wir nehmen das offene Meer als Gebiet an, das als Rand lediglich die Inselberandung hat, und denken uns im ersten Schritt noch zusätzlich zu den von den drei Seen aus angelegten Kanälen einen Kanal vom Meer aus gegraben, so daß insgesamt vier Gebiete mit paarweise punktfremden Berandungen entstehen. Die Kanäle erweitern wir abzählbar oft analog wie oben. Nach Grenzübergang ergibt sich ein Kontinuum, das gleichzeitig Rand von vier Gebieten ist.

Es war sehr überraschend, als PEANO ([44]) im Jahre 1890 zeigte, daß sich das abgeschlossene Zahlenintervall $[0,1]$ stetig auf das Einheitsquadrat $[0,1] \times [0,1]$ abbilden läßt. Man erhält leicht eine derartige Abbildung auf die folgende Weise. Ausgegangen wird von einer Folge $f_1, f_2, \ldots$ von Abbildungen, die, wie in Abb. 8 angedeutet, definiert sind. f_1 bildet $[0,1]$ linear auf die Diagonale des Einheitsquadrates $[0,1] \times [0,1]$ ab. Um f_2 zu erhalten, wird $[0,1]$ in neun gleichlange Teilintervalle und das Einheitsquadrat in neun gleichgroße Quadrate zerlegt. f_2 bildet jedes der Teilintervalle analog wie f_1 jeweils auf die Haupt- bzw. Nebendiagonale eines Teilquadrates ab, so daß f_2 als Bild den angegebenen Streckenzug hat. Der Übergang von f_2 zu f_3 erfolgt bezüglich jeder

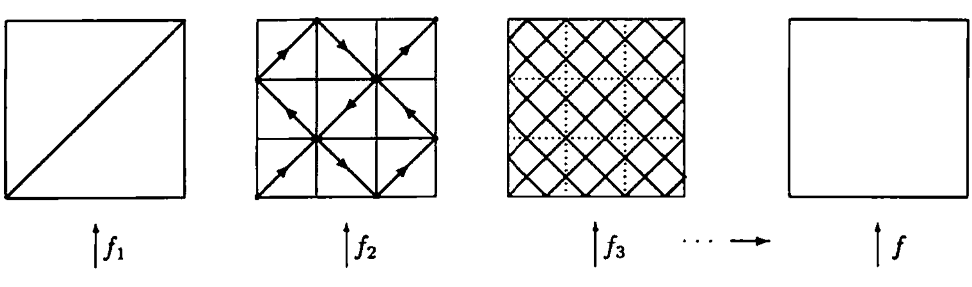


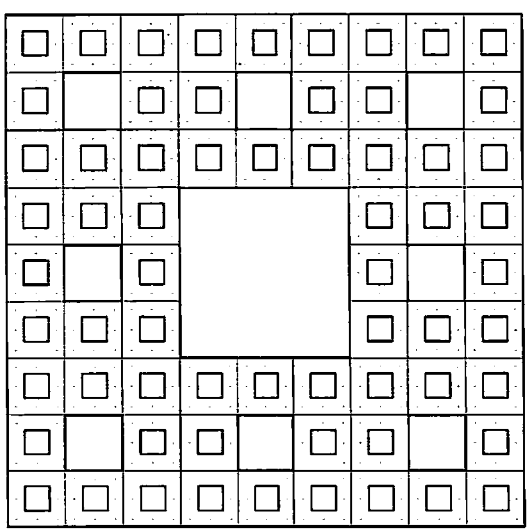
Abb. 8

der Haupt- bzw. Nebendiagonalen wie der von f_1 zu f_2. Entsprechend wird weiter verfahren. Die sich ergebende Folge $f_1, f_2, \ldots$ konvergiert gleichmäßig gegen eine stetige Abbildung f von $[0,1]$ auf $[0,1] \times [0,1]$.

Mit PEANOs Resultat mußten frühere Dimensionsvostellungen korrigiert werden, zumal schon vorher CANTOR zeigen konnte, daß sich das Einheitsintervall eineindeutig auf das

Einheitsquadrat abbilden läßt. Befriedigend war dann, als BROUWER seinen Satz über die Invarianz der Dimension ([7]) vorstellte, nach dem es keine stetige und eineindeutige Abbildung des Einheitsintervalles auf das Einheitsquadrat gibt; jede derartige Abbildung hätte eine stetige Umkehrung, wäre also ein Homöomorphismus. Der BROUWERsche Satz über die Invarianz der Dimension besagt, daß zwei in euklidischen Räumen verschiedener Dimension liegende Mengen, die innere Punkte besitzen, nicht homöomorph sind. Eine Vereinfachung des Beweises gelang mit dem SPERNERschen Lemma ([53]) sowie dem Lemma von KNASTER, KURATOWSKI und MAZURKIEWICZ ([37]) (siehe auch [49]).
HAHN ([28]) und MAZURKIEWICZ ([41]) bewiesen 1914 bzw. 1920 das folgende Kriterium über stetige Streckenbilder, das auch HAUSDORFF in seine 1927 erschienene „Mengenlehre" aufgenommen hat.

Satz. *Ein* HAUSDORFF*raum ist genau dann stetiges Bild des Einheitsintervalles* $[0, 1]$, *wenn er ein lokal zusammenhängendes Kontinuum ist und dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt.*
Damit erweisen sich viele topologische Räume als stetige Streckenbilder, zum Beispiel Würfel, Kugeln, Tori und projektive Räume. Ein beeindruckendes Beispiel eines stetigen Streckenbildes soll als nächstes angeführt werden, nämlich der **Sierpińskische Teppich** ([52]), der eine nirgendsdichte Teilmenge der Ebene ist (siehe Abb. 9). Man erhält ihn als Bild des Limes einer gleichmäßig konvergenten Folge $f_1, f_2, \ldots$ von Abbildungen, die ähnlich wie im vorangehenden Fall definiert sind, wobei allerdings bei f_2 die mittlere Bilddiagonale durch die obere und linke Kante des mittleren Quadrats ersetzt ist und entsprechend fortgefahren wird. Dabei werden jeweils nur die Diagonalen durch die betreffenden Streckenzüge ersetzt (siehe Abb. 10).



Sierpińskischer Teppich

Abb. 9

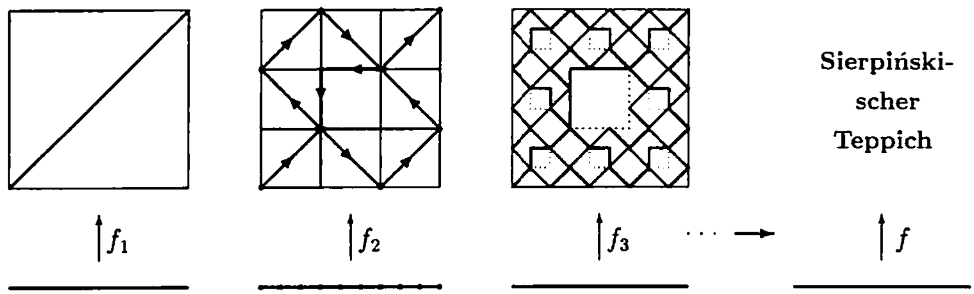


Abb. 10

Der SIERPIŃSKIsche Teppich tritt auch in der fraktalen Geometrie auf, einem sehr jungen Zweig der Mathematik (siehe etwa [13]).Er ist nämlich eine selbstähnliche Menge (englisch: self similar set). Allgemein heißt eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X, d) eine **selbstähnliche Menge**, wenn endlich viele Ähnlichkeitsabbildungen $f_1, \ldots, f_n$ dieses Raumes auf sich existieren, so daß $A = f_1[A] \cup \cdots \cup f_n[A]$ gilt. Die Forderung an f_i, eine Ähnlichkeitsabbildung zu sein, besagt natürlich, daß die Abstände $d(f_i(x), f_i(y))$ und $d(x, y)$ proportional sind. Im Falle des SIERPIŃSKIschen Teppichs sind $f_1, \ldots, f_n$ die 8 Ähnlichkeitsabbildungen des Gesamtquadrats auf die 8 kleineren Randquadrate, die sich durch Translationen und Verkleinerungen ergeben.

Auch das dreidimensionale Analogon zum SIERPIŃSKIschen Teppich, der **Mengersche Schwamm**([42]), ist stetiges Streckenbild und eine selbstähnliche Menge (siehe Abb. 11).

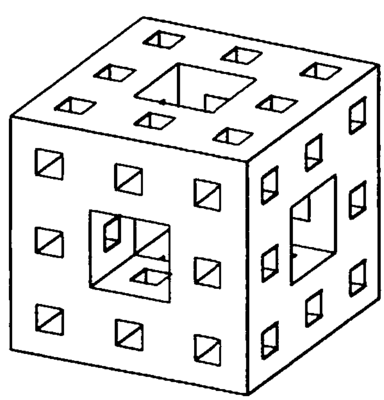


Abb. 11

Das betreffende eindimensionale Analogon ist auch eine selbstähnliche Menge, aber kein stetiges Streckenbild, es ist nämlich das **Cantorsche Diskontinuum**. Das zeigt schon, daß die Beziehungen zwischen Kontinua und fraktaler Geometrie nicht allzu eng sind.

Sicher gaben topologisch-geometrische Fragestellungen einen entscheidenen Anstoß für die Entwicklung der Theorie der Kontinua. Für die Behandlung solcher Fragestellungen mußte aber mehr und mehr ein feinsinniger eigener Apparat, die **algebraische Topologie**, entwickelt werden. Man verließ damit methodisch den engeren Kreis der Theorie der Kontinua. Die algebraische Topologie untersucht topologische Probleme mit algebraischen Mitteln, indem den topologischen Räumen Gruppen, und zum Teil auch andere algebraische Strukturen, und den stetigen Abbildungen Homomorphismen zugeordnet werden. Es entsteht dabei ein algebraisches Abbild des topologischen Sachverhalts. Es würde den Rahmen dieses Beitrags übersteigen, darauf genauer einzugehen.
Wir wollen als nächstes auf einige Probleme zu sprechen kommen, die topologische Kurven und Flächen betreffen.
Seit längerem sind topologische Charakterisierungen der **Bögen** und **Jordankurven**, d.h. der topologischen Bilder des Einheitsintervalls $[0, 1]$ bzw. der Einheitskreislinie, bekannt, wie etwa die folgenden.

Satz (Lennes [40] 1911). *Ein topologischer Raum ist ein Bogen dann und nur dann, wenn gilt:*

(1) *Er ist ein Kontinuum, das dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt.*

(2) *Es gibt zwei Punkte a und b (die beiden Endpunkte des Bogens), so daß die einzige a und b enthaltende zusammenhängende Teilmenge der ganze Raum ist.*

Satz (Wilder [59] 1931). *Ein topologischer Raum ist eine* JORDAN*kurve genau dann, wenn gilt:*

(1) *Er ist ein Kontinuum, das dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genügt und aus mindestens zwei Punkten besteht.*

(2) *Er ist nicht durch einen Punkt zerlegbar, aber durch je zwei.*

Die Arbeit [40] bringt im wesentlichen den Inhalt eines 1905 von LENNES vor der Amerikanischen Mathematischen Gesellschaft gehaltenen Vortrages. In ihr selbst kommt natürlich der Begriff des topologischen Raumes noch nicht vor. LENNES geht in [40] von einer Zwischenrelation als Grundbegriff aus, mit dem ein ordnungsgeometrischer Ebenenbegriff eingeführt wird. Seine Untersuchungen in [40] beziehen sich auf derartige Ebenen, in denen unter anderem Dreiecke und deren Inneres erklärt sind. Letzteres zieht er zur Beschreibung topologischer Eigenschaften heran.
Im weiteren wenden wir uns einer wohlbekannten Aussage zu, die von der Erwartungshaltung einleuchtend ist, jedoch einen anspruchsvollen Beweis benötigt. Gemeint ist der JORDANsche Zerlegungssatz. Bevor wir diesen anführen, sei jedoch vermerkt, daß es Kontinua in der Ebene gibt, die diese in mehr als zwei Gebiete zerlegen, so daß jedes dieser Gebiete das betreffende Kontinuum als Berandung besitzt. Das entnimmt man etwa dem erwähnten „Insel“-Beispiel aus [3].

Satz (Jordan [34] 1887). *Jede* JORDAN*kurve der Ebene zerlegt diese in genau zwei Gebiete, von denen das eine beschränkt (inneres Gebiet) und das andere unbeschränkt (äußeres Gebiet) ist. Sie ist die gemeinsame Berandung dieser Gebiete.*

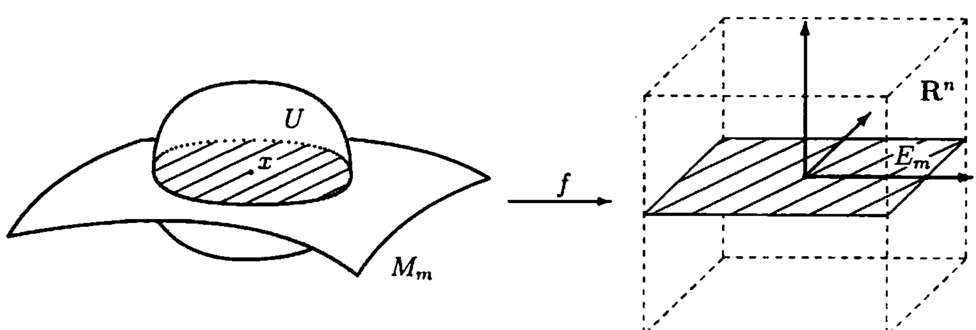
In der Literatur sind viele Beweise des JORDANschen Zerlegungssatzes angegeben worden, der erste vollständige gelang VEBLEN 1905.
Von SCHOENFLIES ([50] 1908) stammt die folgende

Ergänzung: *Jede topologische Abbildung einer* JORDAN*kurve der Ebene auf die Einheitskreislinie (eindimensionale Sphäre S_1) läßt sich zu einer topologischen Abbildung der Ebene auf sich erweitern, die das innere Gebiet der* JORDAN*kurve auf das Innere des Einheitskreises und damit auch das äußere Gebiet dieser Kurve auf das Äußere des Einheitskreises abbildet.*

Der JORDANsche Zerlegungssatz besitzt das folgende höherdimensionale Analogon.

Satz (Brouwer [8] 1912). *Auch für $n > 2$ zerlegt jedes im R^n liegende topologische Bild der $(n-1)$-Sphäre S_{n-1} den R^n in zwei Gebiete, ein beschränktes und ein unbeschränktes.*

Man beweist diesen Satz mittels des von BROUWER eingeführten Begriffs des Abbildungsgrades.
Es ist nun weit gefehlt anzunehmen, daß auch die SCHOENFLIESsche Ergänzung auf höhere Dimensionen übertragbar ist. Man zeigt das unter Benutzung des Begriffs der lokalen Glattheit, auf den als nächstes eingegangen werden soll.
Es seien m und n natürliche Zahlen mit $m < n$. Eine im R^n liegende m-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit M (lokal homöomorph dem R^m) heißt **lokal glatt in einem Punkt** x von M, wenn x eine Umgebung U im R^n besitzt, so daß eine topologische Abbildung von U auf den R^n existiert, die x auf 0 und $U \cap M$ auf eine m-dimensionale Ebene E_m abbildet (siehe Abb. 12). Die topologische Mannigfaltigkeit M heißt **lokal glatt**, wenn sie in jedem ihrer Punkte lokal glatt ist.



Topologische Abbildung $f : U \to \mathrm{R}^n$ mit $f(x) = 0$ und $f[U \cap M_m] = E_m$

Abb. 12

Es gibt nun topologische Bilder der 2-Sphäre S_2 im $\mathbf{R}^3$, die nicht lokal glatt sind, für die damit das höherdimensionale Analogon zur SCHOENFLIESschen Ergänzung nicht gilt. Beispiele dafür gaben 1920 L. ANTOINE und 1924 J. W. ALEXANDER ([2]) an. Das Beispiel von ALEXANDER, die **gehörnte Sphäre**, wollen wir als nächstes vorstellen

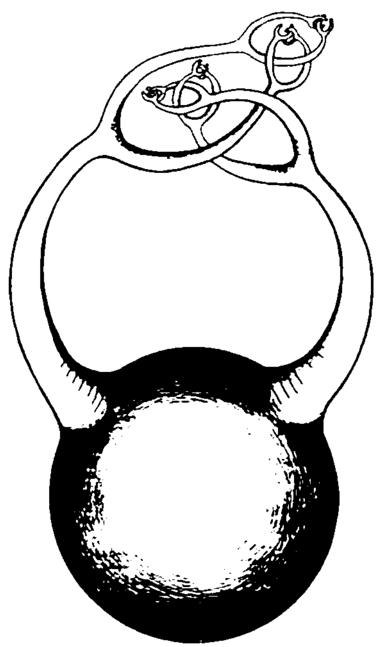


Abb. 13

(siehe auch [49]). Es liefert ein typisches Beispiel, in dem ein vollständiges anschauliches Erfassen schwierig ist. Um die gehörnte Sphäre zu erhalten, wird im ersten Schritt auf die 2-Sphäre ein Hörnerpaar aufgesetzt. Im zweiten Schritt wird auf jedes der beiden Enden dieses Paares wieder ein Hörnerpaar aufgesetzt, so daß die beiden neuen Hörnerpaare ineinandergreifen, usw. Nach Grenzübergang ergibt sich die gehörnte Sphäre (siehe Abb. 13). Die Menge der Punkte, in denen diese zweidimensionale Mannigfaltigkeit nicht lokal glatt ist, ist homöomorph zum CANTORschen Diskontinuum.

HAUSDORFF hat mit seinem 1914 erschienenen Lehrbuch der klassischen allgemeinen Topologie ihren heute noch gültigen Rahmen gegeben. Natürlich wurde die allgemeine Topologie inzwischen stark weiterentwickelt. Seit langem ist in diese Theorie ein grundlegender weiterer Raumtyp mit aufgenommen, nämlich der des **uniformen Raumes**. Er wurde 1937 von A. Weil in [59] eingeführt. Auf wichtige neuere Raumbegriffe, wie den des **Proximitätsraumes** ([14]), des **Nearnessraumes** ([32]) und den des **Limesraumes** ([36]) sowie auf die **kategorielle Topologie** (siehe [1]) wurde im Beitrag [46] dieser Vorlesungsreihe eingegangen. Bezüglich Nearnessräume und Limesräume siehe auch [45] bzw. [21]. Der Begriff der **Kategorie** wurde 1945 von EILENBERG und MACLANE ([15]) geschaffen. Er erweist sich für die moderne topologische Forschung als unentbehrlich. Mit den eben erwähnten Raumtypen hängt eng der 1968 von H. H. KELLER in [35] eingeführte Begriff des **Cauchyraumes** zusammen. Die Theorie der CAUCHYräume liefert wichtige Beiträge über Vervollständigungen. Ein weiterer interessanter Raumtyp ist der des **syntopogenen Raumes** von Á. CSÁSZÁR ([12]). Er zeichnet sich – ähnlich wie der Begriff des Nearnessraumes – dadurch aus, daß er die Begriffe topologischer Raum, Proximitätsraum und uniformer Raum als Spezialfälle enthält.

Zum Abschluß sei auf einige andere Weiterentwicklungen hingewiesen und seien noch einige historische Bemerkungen angeführt.

Seit langem bilden **prätopologische Räume** ein wichtiges Untersuchungsobjekt in der allgemeinen Topologie. Man definiert sie als verallgemeinerte topologische Räume etwa mittels des Hüllenoperators $A \mapsto \overline{A}$, wobei einfach die Forderung der Idempotenz ($\overline{\overline{A}} = A$) weggelassen ist. Sie wurden bereits 1935 in der Arbeit [31] von HAUSDORFF untersucht und dort als **gestufte Räume** bezeichnet. Neben „prätopologischer Raum" ist jetzt eine weitere übliche Bezeichnung **closure space**, die auf ČECH ([10]) aus der Zeit zwischen 1936-1939 zurückgeht (vergleiche die Anmerkungen in [51]).

Natürlich kann man – was allerdings nicht üblich ist – Prätopologien wie auch Topologien mittels des Begriffs der **Ableitung** A^d einer Menge A definieren. A^d besteht aus allen **Häufungspunkten** von A. Die betreffenden Axiome sind:

(1) $\emptyset^d = \emptyset$.

(2) $x \in A^d$ hat $x \in (A \setminus \{x\})^d$ zur Folge.

(3) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$ für alle Teilmengen A und B.

beziehungsweise zusätzlich

(4) Es gilt $A^{dd} \subseteq A \cup A^d$ für jede Teilmenge A.

Die Beziehung zum Hüllenoperator ist durch $\overline{A} = A \cup A^d$ und $A^d = \{x \mid x \in \overline{A \setminus \{x\}}\}$ gegeben.

Das erste Trennungsaxiom, also die Bedingung, daß jede einelementige Menge abgeschlossen ist, läßt sich mittels des Ableitungsbegriffs auf die folgende Weise beschreiben:

(T1) $\{x\}^d = \emptyset$ für jeden Punkt x.

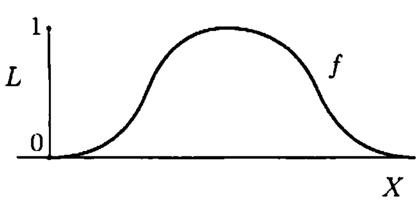
Prätopologische Räume, die diesem Trennungsaxiom genügen, werden bereits durch (1), (T1) und (3) charakterisiert, da (2) aus diesen Bedingungen folgt.

Von F. RIESZ wurde in seiner 1907 erschienenen Arbeit [47] (siehe auch [48]) ein Raumbegriff vorgeschlagen, der schon dem Begriff des topologischen Raumes nahekommt. Er wurde übrigens von ihm als „mathematisches Kontinuum“ bezeichnet. Im jetzigen Sprachgebrauch benutzt F. RIESZ als Grundbegriff den der Ableitung und sind seine Räume nichts anderes als prätopologische Räume, die dem ersten Trennungsaxiom genügen und zusätzlich noch eine Abschwächung des zweiten Trennungsaxioms erfüllen, die allerdings unglücklich gewählt ist. Sie besagt, daß $x \in A^d$ und $y \neq x$ die Existenz einer Teilmenge B von A mit $x \in B^d$ und $y \notin B^d$ nach sich zieht.

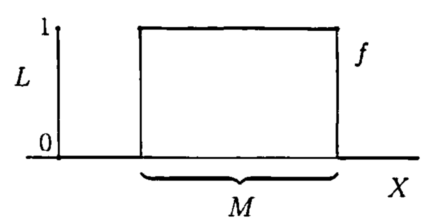
Die 1906 von FRÉCHET zum ersten Male untersuchte Folgenkonvergenz ist wieder eine aktuelle Forschungsthematik. Man ist jetzt mit den Eigenheiten dieser Art von Konvergenzstrukturen besser vertraut. Sie wird unter anderem für Vervollständigungsuntersuchungen eingesetzt und hat – unter abgeschwächterer Axiomatik als bei FRÉCHET – interessante Anwendungen in der Funktionalanalysis.

Eine wichtige Modifikation der Folgenkonvergenz tritt neuerdings in der numerischen Mathematik auf, die **diskrete Konvergenz**. Dieser topologische Begriff, der zuerst von Numerikern eingeführt und untersucht wurde – zu nennen ist STUMMEL ([55]) – gestattet wichtige Grundlagenuntersuchungen für numerische Approximationsmethoden (siehe auch [19] und [20]).

Ein weiterer interessanter neuer topologischer Begriff ist der der Fuzzytopologie. Nach TIETZE kann man – wie erwähnt – Topologien auf einer Menge X als Gesamtheiten von Teilmengen von X, den jeweiligen offenen Mengen, definieren. Man erhält den Begriff der **Fuzzytopologie** (CHANG [11] 1968, GOGUEN [27] 1967), indem man den üblichen Teilmengenbegriff durch den der Fuzzyteilmenge bezüglich eines gewissen vollständigen Verbandes L ersetzt, also „offene“ Fuzzyteilmengen vorgibt. Das kleinste und das größte Element von L werden stets mit 0 bzw. 1 bezeichnet. Standardfall für L ist das abgeschlossene reelle Zahlenintervall $[0, 1]$. Eine **L-Fuzzyteilmenge** einer Menge X ist eine Abbildung $f : X \to L$. Dabei interpretiert man den Wert $f(x)$ jedes Elements x von X als Zugehörigkeitsgrad von x zu dieser Fuzzyteilmenge. Besitzt ein Element x den Wert 0 bzw. 1, so besagt dies, daß x dieser Fuzzyteilmenge nicht angehört bzw. angehört. Wenn f keine von 0 und 1 verschiedene Werte hat, so bezeichnet man diese Fuzzyteilmenge als **scharf** und identifiziert sie mit der Teilmenge (im üblichen Sinne) $M = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$ von X (siehe Abb. 14). Typisch für Fuzzyteilmengen ist aber, daß auch von 0 und 1 verschiedene Werte erlaubt sind.



f Fuzzyteilmenge von X



M klassische Teilmenge von X

Abb. 14

Die Fuzzytheorie, die von ZADEH ([60]) im Jahre 1965 begründet wurde, hat in jüngster Zeit große Erfolge bei technischen Anwendungen erzielt, und zwar in der **Fuzzy-Steuerung** (siehe die Hinweise in [24]).
Die allgemeine Topologie, die ein eigenständiges Teilgebiet der Mathematik ist, besitzt wichtige innermathematische Anwendungen, unter anderem in der **Analysis** und **Geometrie**. Sie geht natürlich wesentlich in die **Theorie der topologischen Gruppen** und in die **Theorie der topologischen Vektorräume** und damit in die **Funktionalanalysis** mit ein.
Die in neuerer Zeit untersuchten topologischen Strukturarten mit ihren Modifikationen und Verallgemeinerungen liefern wertvolle Erkenntnisse für den Aufbau einer **einheitlichen Strukturtheorie** (siehe etwa [16] und [22] - [26]). Diesem Anliegen dienen auch zahlreiche Beiträge zur Kategorientheorie, insbesondere solche, die sich mit Beziehungen zwischen **kategorieller Topologie** und **kategorieller Algebra** sowie deren Vereinheitlichung befassen (siehe etwa [1] und [33]).

Literatur

[1] J. Adámek, H. Herrlich und G. Strecker, Abstract and Concrete Categories, John Wiley & Sons, Inc, New York - Chichester - Brisbane - Toronto - Singapure, 1990

[2] J. W. Alexander, An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **10** (1924) 8-10

[3] P. S. Alexandroff, Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956

[4] P. S. Alexandroff und P. S. Urysohn, Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Verhandel. Koninkl. nederl. akad. wet. Amsterdam, Afd. nat. (1) **14**, No. 1 (1929)

[5] E. Borel, Sur l'approximation de nombres par des nombres rationnels, C. R. Acad. Paris **136** (1903) 1054-1055

[6] N. Bourbaki, Éléments de mathématique, Livre III, Topologie générale, Hermann, Paris 1940, 3. éd. 1961

[7] L. E. J. Brouwer, Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl, Math. Ann. **70** (1911) 161-165

[8] L. E. J. Brouwer, Beweis des Jordanschen Satzes für den n-dimensionalen Raum, Math. Ann. **71** (1912) 314-319

[9] E. Čech, On bicompact spaces, Ann. Math. (2) **38** (1937) 823-844

[10] E. Čech, Topological Spaces, Academia, Prague und Wiley, London et al., 1966

[11] C. L. Chang, Fuzzy topological spaces. J. Math. Anal. Appl. **245** (1968) 182-190

[12] Á. Császár, Grundlagen der allgemeinen Topologie, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig, 1963

[13] G. A. Edgar, Measure, Topology, and Fractal Geometry, Springer Verlag, New York - Berlin - Heidelberg, 1990

[14] V. A. Efremovič, The geometry of proximity I (russ.) Mat. Sbornik **31**(73) (1953) 189-200

[15] S. Eilenberg und S. Mac Lane, General theory of natural equivalences, Trans. Amer. Math. Soc. **58** (1945) 231-294

[16] P. Eklund und W. Gähler, Fuzzy filter functors and convergence, in: Applications of Category Theory to Fuzzy Subsets, 11 th International Seminar on Fuzzy Set Theory, Linz 1989, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht - Boston - London (1992) 109-136

[17] M. Fréchet, Sur quelques points du calcul fonctionnel, Rend. Circolo mat. Palermo **22** (1906) 1-74

[18] M. Fréchet, Les espaces abstraits, Gauthiers-Villars, Paris 1928

[19] S. Gähler, Discrete convergence and applications to integral equations on the half line, Proc. Sixth Prague Topological Symp., 1986, Heldermann Verlag, Berlin (1988) 203-210

[20] S. Gähler und W. Gähler, Quadrature methods for the solution of integral equation of the second kind on the half line, Math. Nachr. **140** (1989) 321-346

[21] W. Gähler, Grundstrukturen der Analysis, Akademie Verlag Berlin und Birkhäuser Verlag Basel - Stuttgart, Band 1, 1977 und Band 2, 1978

[22] W. Gähler, A topological approach to structure theory, Math. Nachr. **100** (1981) 93-144

[23] W. Gähler, Monads and convergence, Proc. Conference Generalized Functions, Convergence Structures and Their Applications, Dubrovnik 1987, Plenum press, New York (1988) 29-46

[24] W. Gähler, Fuzzy topology, in: Topology, Measures, and Fractals, Math. Research **66**, Akademie Verlag Berlin (1992) 188-197

[25] W. Gähler, Monadic topology – a new concept of generalized topology, in: Recent Developments of General Topology and its Applications, International Conference in Memory of Felix Hausdorff, Math. Research **67**, Akademie Verlag Berlin (1992) 136-149

[26] W. Gähler, Convergence, Seminarberichte aus dem Fachbereich Mathematik der Fern-Universität Hagen **46** (1993) 31-73

[27] J. A. Goguen, L-fuzzy sets, J. Math. Anal. Appl. **18** (1967) 145-174

[28] H. Hahn, Über die allgemeinste ebene Punktmenge, die stetiges Bild einer Strecke ist, Jahresberichte der DMV **23** (1914) 318-322

[29] F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Verlag von Veit & Comp., Leipzig 1914

[30] F. Hausdorff, Mengenlehre, Walter de Gruyter & Co, Berlin und Leipzig 1927

[31] F. Hausdorff, Gestufte Räume, Fundamenta Math. **25** (1935) 486-502

[32] H. Herrlich, A concept of nearness, Gen. Top. Appl. **4** (1974) 191-212

[33] G. Jarzembski, Partially monadic functors – a unifying approach to Categorical Algebra and Topology, in: Seminarberichte aus dem Fachbereich Mathematik, Fern-Universität Hagen, Part I, General theory, **33** (1989) 79-125, Part II, Completeness and complitions, **34** (1989) 89-110, Part III, Representation theorems, **36** (1989) 27-74

[34] C. Jordan, Cours d'analyse III, Paris 1887

[35] H. H. Keller, Die Limes-Uniformisierbarkeit der Limesräume, Math. Ann. **176** (1968) 334-341

[36] H. J. Kowalsky, Limesräume und Komplettierung, Math. Nachr. **12** (1954) 301-340

[37] B. Knaster, K. Kuratowski und S. Mazurkiewicz, Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe, Fundamenta Math. **14** (1929) 132-137

[38] K. Kuratowski, Sur l'operation $\overline{A}$ de l'analysis situs, Fundamenta Math. **3** (1922) 182-199

[39] K. Kuratowski, A Half Century of Polish Mathematics, Polish Scientific Publishers, Warszawa 1980

[40] N. J. Lennes, Curves in non-metrical analysis situs with an application in the calculus of variations, Amer. J. Math. **33** (1911) 287-326

[41] S. Mazurkiewicz, Sur les lignes de Jordan, Fundamenta Math. **1** (1920) 166-209

[42] K. Menger, Kurventheorie, B. G. Teubner. Leipzig und Berlin 1932

[43] S. B. Nadler, Jr., Continuum Theory. An Introduction, Marcel Dekker, Inc., New York - Basel - Hong Kong 1992

[44] G. Peano, Sur une courbe qui remplit toute une aire plane, Math. Ann. 36 (1890)

[45] G. Preuß , Theory of Topological Structures, Reidel, Dordrecht - Boston - Lancester 1988

[46] G. Preuß , Die Entwicklung des Raumbegriffs in der Topologie von Hausdorff bis zur Gegenwart, in diesem Band

[47] F. Riesz, Die Genesis des Raumbegriffes, Math. und Naturwiss. Berichte aus Ungarn 24 (1907) 309-353

[48] F. Riesz, Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre, Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici, Roma 1908, Band II, Roma 1909, 18-24

[49] W. Rinow, Lehrbuch der Topologie. Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin 1975

[50] A. Schoenflies, Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, Erster Teil, Leipzig 1900, Zweiter Teil, Leipzig 1908, Jahresbericht der DMV, Bd. 8 und 2. Ergänzungsband

[51] F. Schwarz, Hulls of classes of "gestufte Räume", in: Recent Developments of General Topology and its Applications, International Conference in Memory of Felix Hausdorff, Math. Research **67**, Akademie Verlag Berlin (1992) 299-302

[52] W. Sierpiński, Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoque et continue de toute courbe donnée, C. R. Paris **162** (1916) 629-632

[53] E. Sperner, Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes, Abh. Math. Sem. Hamburg **6** (1928) 265-272

[54] M. H. Stone, Applications of the theory of Boolean rings to general topology, Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937) 375-481

[55] F. Stummel, Diskrete Konvergenz linearer Operatoren, I, Math. Ann. **190** (1970) 52-92, II, Math. Z. **120** (1971) 231-264, III, Proc. Conf. Lin. per. and Approx. (Oberwolfach 1971). Intern. Series Num. Math. **20** (1972) 196-216

[56] H. Tietze, Beiträge zur allgemeinen Topologie, I. Axiome für verschiedene Fassungen des Umgebungsbegriffs, Math. Ann. **88** (1923) 290-312

[57] A. Tychonoff, Über die topologische Erweiterung von Räumen, Math. Ann. **102** (1929) 544-561

[58] A. Weil, Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale, Hermann, Paris 1937

[59] R. L. Wilder, Concerning simple continuous curves and related point sets, Amer. J. Math. **53** (1931) 39-55

[60] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Inform. and Control **8** (1965) 338-353