

Die Entwicklung des Raumbegriffes in der Topologie von Hausdorff bis in die Gegenwart

Gerhard Preuß, Berlin

In der Allgemeinen Topologie (auch Analytische oder Mengentheoretische Topologie genannt) werden Begriffe wie Stetigkeit und Konvergenz auf eine allgemeine Grundlage gestellt. Um sich klarzumachen, wie so etwas geschehen kann, sei zunächst einmal an die übliche Definition der Konvergenz einer Folge reeller Zahlen bzw. die Stetigkeit einer reellen Funktion erinnert:

1. Definitionen. 1) Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt *konvergent gegen eine reelle Zahl x* , wenn gilt: Zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ existiert eine natürliche Zahl $N(\varepsilon)$, so daß für alle natürlichen Zahlen $n \geq N(\varepsilon)$ gilt $|x_n - x| < \varepsilon$.

2a) Eine Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der reellen Zahlen in sich heißt *stetig im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$* , wenn gilt: Zu jedem (reellen) $\varepsilon > 0$ existiert ein (reelles) $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so daß für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2b) Eine Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *stetig*, wenn sie in jedem $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Hierbei kann für zwei reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ der Absolutbetrag $|x - y|$ ihrer Differenz als "Abstand" der Punkte x und y interpretiert werden. Gelingt es nun auf einer beliebigen Menge X einen "vernünftigen" Abstandsbegriff einzuführen, so kann man Stetigkeit und Konvergenz erklären wie unter 1. Das hat M. Fréchet [10] im Jahre 1906 getan, und zwar durch folgende Definition:

2. Definition. Es sei X eine Menge. $X \times X$ die Menge der geordneten Paare (x, y) von Elementen x, y aus X sowie $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung derart, daß für alle $x, y, z \in X$ gelten:

$$\text{M1)} \quad d(x, y) = 0 \text{ genau dann, wenn } x = y \text{ gilt,}$$

$$\text{M2)} \quad d(x, y) = d(y, x),$$

$$\text{M3)} \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{Dreiecksungleichung}).$$

Dann heißt d *Metrik* auf X und (X, d) heißt *metrischer Raum*. Für je zwei Elemente $x, y \in X$ heißt $d(x, y)$ der *Abstand* von x und y .

Offensichtlich gilt $d(x, y) \geq 0$ für alle $(x, y) \in X \times X$ (setze in M3) $z = x$ und wende M1) und M2) an).

Leider ist der Begriff des metrischen Raumes für die Behandlung der Konvergenz von

Folgen reeller Funktionen zu eng, wie der folgende Satz zeigt:

3. Satz (vgl. [13; 6.7.1]). Auf der Menge X aller Abbildungen von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ gibt es keine Metrik d , so daß für jedes $f \in X$ und jede Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X folgende Aussagen äquivalent sind:

- (1) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen f , d.h.
 $f_n(x) \rightarrow f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- (2) In (X, d) konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen f .

Es ist also notwendig, zu allgemeineren Strukturen zu gelangen, mit deren Hilfe man Stetigkeit und Konvergenz erklären kann. Hierbei ist die Beobachtung hilfreich, daß bereits in metrischen Räumen *Umgebungen von Punkten* erklärt werden können: Ist etwa (X, d) ein metrischer Raum sowie $x \in X$, so heißt $U(x, \varepsilon) = \{y \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ ε -*Umgebung von x* ($\varepsilon > 0$ reell). Daran anknüpfend hat F. Hausdorff [11] im Jahre 1914 den Begriff "Umgebung eines Punktes" axiomatisiert. Insbesondere verlangte er, daß je zwei verschiedene Punkte disjunkte Umgebungen besitzen sollen (solche Räume heißen heute Hausdorff-Räume). Daraus resultiert, daß in Hausdorff-Räumen der Limes einer Folge eindeutig bestimmt ist. Aber auch das "Benachbartsein" von Punkten und Mengen kann in Hausdorff-Räumen erklärt werden. Ist nämlich X ein Hausdorff-Raum und $A \subset X$ sowie $x \in X$, so heißt x zu A *benachbart* oder *Berührungspunkt* von A , wenn in jeder Umgebung von x Punkte von A liegen. Die Menge aller Berührungspunkte von A wird mit $\bar{A}$ bezeichnet und umfaßt A . $\bar{A}$ heißt *abgeschlossene Hülle* von A .

1922 axiomatisierte C. Kuratowski [17] den Begriff "abgeschlossene Hülle" und gelangte so zum heute üblichen Begriff des topologischen Raumes, einer leichten Verallgemeinerung des Begriffes "Hausdorff-Raum".

4. Definitionen. 1) Ein *topologischer Raum* ist ein Paar (X, h) , wobei X eine Menge und $h : P(X) \rightarrow P(X)$ eine Abbildung der Potenzmenge von X in sich ist derart, daß gelten:

- 1) $h(\emptyset) = \emptyset$
- 2) $A \subset h(A)$ für alle $A \in P(X)$
- 3) $h(h(A)) \subset h(A)$ für alle $A \in P(X)$
- 4) $h(A \cup B) = h(A) \cup h(B)$ für alle $A, B \in P(X)$.

Ist (X, h) ein topologischer Raum, so heißt $h(A)$ die *abgeschlossene Hülle* von $A \subset X$ und statt $x \in h(A)$ sagt man, daß x zu A *benachbart* ist oder daß x ein *Berührungspunkt* von A ist.

2) Eine *stetige Abbildung* $f : (X, h) \rightarrow (X', h')$ zwischen topologischen Räumen ist eine Abbildung $f : X \rightarrow X'$, die das Benachbartsein von Punkten und Mengen bewahrt, d.h. für alle $x \in X$ und alle $A \in P(X)$ folgt aus " x benachbart zu A ", daß $f(x)$ zu $f[A] = \{f(x) \mid x \in A\}$ benachbart ist.

Insbesondere werden die reellen Zahlen zu einem topologischen Raum, indem man das Benachbartsein von $x \in \mathbb{R}$ zu $A \subset \mathbb{R}$ dadurch erklärt, daß in jeder ε -Umgebung $U(x, \varepsilon)$ von x Punkte von A liegen, wobei $U(x, \varepsilon) = \{y | y \in \mathbb{R} \text{ und } |x - y| < \varepsilon\}$ ist. Dann ist die hier gegebene Definition der Stetigkeit für den Spezialfall der reellen Zahlen gerade äquivalent zur Definition 1.2)b). Verzichtet man bei den von Hausdorff gegebenen Axiomen auf die Forderung, daß je zwei verschiedene Punkte disjunkte Umgebungen besitzen sollen, so gelangt man zu einer zur Definition 4.1) äquivalenten Beschreibung eines topologischen Raumes mit Hilfe von Umgebungen (vgl. [19; 1.1]). Interpretiert man die Definition 1.1) so, daß eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen gegen eine reelle Zahl x konvergiert genau dann, wenn zu jeder ε -Umgebung U von x eine natürliche Zahl $N(U)$ existiert, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N(U)$ gilt $x_n \in U$, so kann in einem beliebigen topologischen Raum (X, h) die Konvergenz einer Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Elementen (sprich: Punkten) aus X gegen einen Punkt $x \in X$ erklärt werden, indem man den Begriff " ε -Umgebung" durch "Umgebung" ersetzt.

Begriffe wie gleichmäßige Stetigkeit, gleichmäßige Konvergenz oder Vollständigkeit, die für metrische Räume einen Sinn ergeben, können in topologischen Räumen nicht erklärt werden. Der Begriff der Vollständigkeit z.B. setzt voraus, daß man Cauchy-Folgen erklären kann. Denkt man an die übliche Definition der Cauchy-Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen, so tauchen Ausdrücke der Form $|x_n - x_m| < \varepsilon$ auf, die so interpretiert werden können, daß x_n in einer ε -Umgebung von x_m und x_m in einer ε -Umgebung von x_n liegt. In topologischen Räumen hat man zwar einen Umgebungsbegriff, aber Umgebungen verschiedener Punkte können nicht der Größe nach verglichen werden (ε -Umgebungen verschiedener Punkte in metrischen Räumen können als gleich groß angesehen werden!). Deshalb führte A. Weil [22] 1937 *uniforme Räume* ein mit Hilfe von "Nachbarschaften", während 1940 W. Tukey [21] eine dazu äquivalente Definition mit Hilfe von "uniformen Überdeckungen" angab. Durch Axiomatisierung des Begriffes "Benachbartsein von zwei Mengen" gelangte 1952 V.A. Efremovič [7] zu *Proximitätsräumen*, von denen sich herausstellte, daß es sich um spezielle uniforme Räume handelt, sog. total beschränkte uniforme Räume (der Begriff "total beschränkt", wie er bei metrischen Räumen üblich ist, läßt sich ohne weiteres auf uniforme Räume übertragen (vgl. [19])).

Danach gab es eine Reihe von Versuchen, topologische und uniforme Konzepte zu vereinen, z.B. 1948 durch L. Nachbin (*quasiuniforme Räume* (vgl. [9])), 1957 durch A. Czászár (*syntopogene Räume* [5]), 1964 durch D.B. Doitchinov (*supertopologische Räume* = verallgemeinerte topologische Räume [6]), 1965 durch M. Katětov (*merotope Räume* = *Semi-Nearness-Räume* [14]) und 1974 durch H. Herrlich (*Nearness-Räume* [12]). Insbesondere entstehen merotope Räume dadurch, daß man in der Definition uniformer Räume durch J.W. Tukey das sog. Sternverfeinerungsaxiom wegläßt, während Nearness-Räume merotope Räume mit einem zusätzlichen Axiom sind. Der Begriff des "Benachbartsein", der fundamental ist für die Topologie, hat nun eine befriedigende Definition gefunden, nämlich mit Hilfe von Nearness-Räumen (bzw. merotopen Räumen) kann das Benachbartsein eines beliebigen Systems von Mengen erklärt werden. Zugleich ist klar, daß mit Nearness-

Räumen sowohl topologische als auch uniforme Aspekte erklärt werden können, nämlich das Benachbartsein von Punkten und Mengen (topologische Aspekte) als auch das Benachbartsein von zwei Mengen [aufgefaßt als zweielementiges Mengensystem] (uniforme Aspekte).

Daneben hat es noch eine ganz anders motivierte Entwicklung gegeben. Da die Stetigkeit einer Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen nicht wie in der Analysis durch konvergente Folgen erklärt werden kann (vgl. [19; 2.1.1]), werden Konzepte benötigt, die den Folgenbegriff verallgemeinern. So haben E.H. Moore und H.L. Smith [18] im Jahre 1922 *Netze* (auch: Moore-Smith-Folgen) anstelle von Folgen betrachtet. 1937 hat dann H. Cartan [2] den Begriff des Filters als Verallgemeinerung des Folgenbegriffes eingeführt. Wegen der Existenz von Ultrafiltern wird in der allgemeinen Topologie die Theorie der Filter bevorzugt.

Durch Axiomatisierung des Begriffes "Konvergenz von Filtern" gelangt man zu *Limesräumen*, die 1954 von H.-J. Kowalsky [16] und 1959 unabhängig von H.R. Fischer [8] eingeführt worden sind. Sie stellen eine Verallgemeinerung topologischer Räume dar. Stetige Abbildungen zwischen Limesräumen sind dann solche Abbildungen f , die gegen x konvergierende Filter überführen in Filter, die gegen $f(x)$ konvergieren. Die Limesräume haben den Vorteil, daß die Menge der stetigen Abbildungen zwischen zwei Limesräumen stets mit einer geeigneten Limesraumstruktur versehen werden kann, d.h. es existieren geeignete Funktionenräume. Die Existenz geeigneter Funktionenräume ist im Rahmen der Theorie topologischer Räume i.a. nicht gewährleistet.

Ein etwas einschränkender Begriff, nämlich der Begriff des *pseudotopologischen Raumes* = (Choquet Raum) wurde bereits 1948 von G. Choquet [3] eingeführt als Verallgemeinerung des Begriffes "topologischer Raum". Auch die pseudotopologischen Räume haben hinsichtlich der Bildung von Funktionenräumen die gleichen angenehmen Eigenschaften wie die Limesräume.

Viele andere Konzepte sind entwickelt worden, z.B. die *Konvergenzräume* von D.C. Kent [15] (1964) oder die *Filterräume* (= grillbestimmte Semi Nearness Räume) von M. Katětov [14] (1965). Auch die beiden letztgenannten Raumklassen verhalten sich hinsichtlich der Bildung von Funktionenräumen besser als die topologischen Räume. Die Filterräume haben darüber hinaus den Vorteil, daß sie topologische und uniforme Konzepte vereinen. Während die Klasse der Filterräume zwar alle Proximitätsräume, aber nicht alle uniformen Räume enthält, gehören zur größeren Klasse der *semiuniformen Konvergenzräume* sogar alle uniformen Räume und alle (symmetrischen) Limesräume [und somit alle (symmetrischen) topologischen Räume], ohne daß die zuvor erwähnten angenehmen Eigenschaften verlorengehen. Darauf ist in Arbeiten von A. Behling [1] 1992 und G. Preuß [20] 1993 hingewiesen worden. Nicht unerwähnt bleiben darf, daß die semiuniformen Konvergenzräume durch Weglassen von Axiomen für uniforme Limesräume entstehen, die auf C.H. Cook und H.R. Fischer [4] im Jahre 1965 zurückgehen und heute in der von O. Wyler [23] 1974 vorgeschlagenen leicht modifizierten Form benutzt werden.

Literatur

- [1] A. BEHLING: *Einbettung uniformer Räume in topologische Universen*. Dissertation. FU Berlin. 1992
- [2] H. CARTAN: *Théorie des filtres*. Comp. Rend. 205, 595–598 (1937).
- [3] G. CHOQUET: *Convergences*. Ann. Univ. Grenoble. Sect. Sc. Math. Phys. (N.S.) 23, 57–112 (1948).
- [4] C.H. COOK UND H.R. FISCHER: *On equicontinuity and continuous convergence*. Math. Ann. 159, 94–104 (1965).
- [5] A. CSÁSZÁR: *Foundations of General Topology*. New York. Macmillan. 1963.
- [6] D.B. DOITCHINOV: *A unified theory of topological spaces, proximity spaces and uniform spaces*. Soviet Math. Dokl. 5, 595–598 (1964).
- [7] V.A. EFREMOVIČ: *Geometry of proximity*. Math. Sb. 31 (73), 189–200 (1952).
- [8] H.R. FISCHER: *Limesräume*. Math. Ann. 137, 269–303 (1959).
- [9] P. FLETCHER UND W.R. LINDGREN: *Quasi-Uniform Spaces*. New York: Marcel Dekker. 1982.
- [10] M. FRÉCHET: *Sur quelques points du calcul fonctionnel*. Rend. Palermo 22, 1–74 (1906).
- [11] F. HAUSDORFF: *Grundzüge der Mengenlehre*. Leipzig. 1914.
- [12] H. HERRLICH: *Topological structures*. In: Math. Centre Tracts 52, pp. 59–122. Amsterdam: Math. Centrum. 1974.
- [13] H. HERRLICH: *Einführung in die Topologie*. Berlin: Heldermann. 1986.
- [14] M. KATĚTOV: *On continuity structures and spaces of mappings*. Comm. Math. Univ. Carolinae 6, 257–278 (1965).
- [15] D.C. KENT: *Convergence functions and their related topologies*. Fund. Math. 54, 125–133 (1964).
- [16] H.-J. KOWALSKY: *Limesräume und Kompletttierung*. Math. Nachr. 12, 301–340 (1954).
- [17] C. KURATOWSKI: *Sur l'opération $\bar{A}$ de l'analysis situs*. Fund. Math. 3, 182–199 (1922).

- [18] E.H. MOORE UND H.L. SMITH: *A general theory of limits*. Am. J. Math. **44**, 102–121 (1922).
- [19] G. PREUSS: *Allgemeine Topologie*. Berlin: Springer. 1972.
- [20] G. PREUSS: *Cauchy spaces and generalizations*. Math. Japonica; erscheint (1993).
- [21] J.W. TUKEY: *Convergence and Uniformity in Topology*. Princeton: University Press. 1940.
- [22] A. WEIL: *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*. Paris: Hermann. 1937.
- [23] O. WYLER: *Filter space monads, regularity, completions*. In: *Topo 72 – General Topology and its Applications* (Lecture Notes in Math. 378), pp. 591–637. Berlin: Springer 1974.