Vorlesungen zum Gedenken an Felix Hausdorff
E. Eichhorn, E. J. Thiele (Hrsg.)

131–164

Grundzüge der Mengenlehre

Ernst-Jochen Thiele, Berlin

Meine sehr geehrten Damen und Herren!

Ich danke dem Fachbereich Mathematik der TFH, insbesondere Herrn Herrmann, dem Dekan, und Herrn Eichhorn, für die Durchführung dieser Reihe von Gedenkvorlesungen an Felix Hausdorff und für die Einladung, darin über „Grundzüge der Mengenlehre“ vorzutragen[75]. Die Einladung habe ich gerne angenommen, den Titel erschrocken zurückgewiesen, ist er doch der Titel des ersten und berühmtesten Buches über Mengenlehre, das (1914!) je geschrieben worden ist. Da er aber, durch Zurückweisung der in seiner Wahl liegenden Anmaßung, Gelegenheit bietet, die überragende Bedeutung Hausdorffs – nach Cantor – für die Entwicklung und Verbreitung der Mengenlehre zu betonen, bin ich dann doch zu ihm zurückgekehrt.

Cantor ist zur Mengenlehre durch die Arbeit an ganz konkreten Fragen der Analysis gekommen.

1854 hatte Riemann seine Habilitationsschrift „Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe“ verfaßt. Über den Einfluß dieser Arbeit auf die Analysis hat Herr von Renteln vor kurzem hier berichtet. Die Frage der Eindeutigkeit der Darstellung einer Funktion durch trigonometrische Reihen hat er dabei nur ganz kurz gestreift. Über diese Frage hatte Heine einen Satz bewiesen, in dem er aber die gleichmäßige Konvergenz der Reihe voraussetzen mußte (mit gewissen Ausnahmen). Dem jungen Privatdozenten Cantor hatte Heine den Rat gegeben, sich mit dieser Frage zu beschäftigen, und Cantors Antwort lautete zunächst (Crelles Journal 172, (1870))

> $f(x)$ sei für jedes x durch eine konvergente trigonometrische Reihe
>
> $$\frac{b_0}{2} + \sum_1^{\infty}(a_n \sin nx + b_n \cos nx)$$
>
> dargestellt. Dann ist diese Reihe eindeutig bestimmt.

Cantor konnte auf die gleichmäßige Konvergenz verzichten, brauchte aber die punktweise Konvergenz in jedem Punkte. Bereits 1871 hatte er erkannt, daß man bei der punktweisen Konvergenz Ausnahmemengen zulassen kann, ohne die Eindeutigkeit zu zerstören;

[75] Dem Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach danke ich für seine Unterstützung bei der Ausarbeitung dieses Vortrags, den Herren W. Deylitz, E. Eichhorn und dem Gutachter für die Durchsicht des Manuskriptes und Hinweise zu seiner endgültigen Fassung. Frau Kurtzahn danke ich für die Herstellung des Manuskripts.

zuerst mußten die Ausnahmemengen noch diskret sein. Wieder ein Jahr später konnte er wesentlich größere Ausnahmemengen zulassen (Mathematische Annalen 5 (1872)). Zur Beschreibung dieser Ausnahmemengen brauchte Cantor zunächst eine präzise Definition der reellen Zahlen (er definierte sie durch Cauchyfolgen von rationalen Zahlen) und den Begriff der Ableitung A' einer Teilmenge A von $\mathbb{R}$,

$$A' := \text{Menge der Häufungspunkte von } A.$$

Höhere Ableitungen werden definiert durch $A^{(n+1)} := (A^{(n)})'$.

Cantors Resultat von 1872 lautete:

> Konvergiert eine trigonometrische Reihe für alle x, bis auf eine Ausnahmemenge A der Art, daß eine Zahl n existiert, so daß $A^{(n)}$ leer ist, gegen eine Funktion f, so ist die Darstellung von f durch eine trigonometrische Reihe eindeutig bestimmt.

Später (1879) hat Cantor diesen Prozeß der iterierten Ableitungen ins Unendliche fortgesetzt; er hat bemerkt, daß es Mengen gibt, bei denen alle Ableitungen endlicher Ordnung vorhanden (d.h. nicht leer) sind, bei denen jedoch die erste (oder zweite oder n-te) Ableitung unendlicher Ordnung leer ist (mit der Definition

$$A^{(\infty)} := \bigcap_{n\in \mathbb{N}} A^{(n)}, \quad A^{(\infty+1)} := (A^{(\infty)})', \quad \text{usw. }).$$

Das ist wohl der Anstoß zur Bildung der unendlichen Ordinalzahlen gewesen. (Die ursprüngliche Frage nach der Eindeutigkeit der Reihenentwicklung hat Cantor dann nicht mehr verfolgt; sie ist bis heute nicht völlig gelöst. Eine Darstellung auch der jüngsten Resultate findet man in dem Buch von Kechris und Louveau)[77].

Vor der Erfindung der unendlichen Ordinalzahlen jedoch hat Cantor den Begriff der Abzählbarkeit entwickelt (Crelles Journal 77, (1874)) und gezeigt, daß die Menge der algebraischen Zahlen abzählbar unendlich, $\mathbb{R}$ jedoch nicht abzählbar unendlich ist (über Intervallschachtelungen und den „Cantorschen Durchschnittssatz"), daß also in jedem Intervall (sogar unendlich viele) transzendente Zahlen existieren müssen - ein neuer Beweis dieses zuvor von Liouville mit ganz anderen Methoden bewiesenen Satzes.

Und 1878 (Crelles Journal 84) wendet er den inzwischen allgemein gefaßten Begriff der Gleichmächtigkeit an und zeigt, daß $\mathbb{R}^1$ gleichmächtig ist mit $\mathbb{R}^n$, für jedes endliche n, ein damals wohl verblüffendes Resultat. Den Beweis führte er dadurch, daß er die Menge

[77] A. Kechris und A. Louveau, Descriptive Set Theory and the Structure of Sets of Uniqueness. Cambridge University Press (1987). - Dies Buch bringt die neuesten Resultate. Ein weiter modernisierter Übersichtsartikel findet sich im Journal of Symbolic Logic 57 (1992), Seiten 413-444. Zu älteren Resultaten vergleiche man die dort genannte Literatur, insbesondere das Buch von N.K. Bary, A Treatise on Trigonometric Series. Macmillan, New York (1964).

der Irrationalzahlen der Einheitsstrecke auf die Menge derjenigen Punkte des Einheitsquadrats, deren beide Koordinaten irrational sind, mittels der Kettenbruchentwicklungen irrationaler Zahlen bijektiv aufeinander abbildete, und diese Bijektion dann auf eine zwischen I und $I \times I$ ausdehnte. - Am Ende der genannten Arbeit beweist er auch noch die Gleichmächtigkeit von I mit $I^{\aleph_0}$ (in heute üblicher Formulierung), und es findet sich die erste Andeutung der Kontinuumhypothese.

Von derartigen „konkreten" mathematischen Gegenständen löst sich Cantor dann und betrachtet beliebige Mengen („Mannichfaltigkeiten"), wobei er sich aber zunächst noch auf „lineare", d.h. Teilmengen von $\mathbb{R}$, beschränkt, diese Beschränkung aber in der dritten Arbeit darüber auch offiziell aufgibt. Untersucht werden beliebige wohldefinierte Mengen auf Gleichmächtigkeit hin; 1883 wird die Theorie der Ordinalzahlen entwickelt. Die meisten der in diesen Arbeiten gewonnenen Begriffe und Resultate kann ich hier nicht einmal erwähnen.

In einer großen (leider nicht mehr weitergeführten) zweiteiligen Arbeit „Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre" (1895 und 1897, Math. Annalen 46 und 49) hat Cantor seine Ideen und Resultate zur Mengenlehre, von allen konkreten mathematischen Situationen losgelöst, dargestellt. Die Arbeit beginnt mit den Worten:

> „Unter einer ‚Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objecten m unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen."

und fährt 12 Zeilen weiter fort

> „ ‚Mächtigkeit' oder ‚Cardinalzahl' von M nennen wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Hülfe unseres activen Denkvermögens dadurch aus der Menge M hervorgeht, daß von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente m und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahirt wird."

Damit möchte ich den groben Abriß über die Geburt der Mengenlehre aus speziellen mathematischen Fragen heraus abschließen. Im folgenden werde ich heute übliche Bezeichnungen benutzen.

Zunächst folgt ein Überblick über die einzelnen Abschnitte. Die Abschnitte A bis C (Begrüßung, Fourierreihen und historische Bermerkungen) sind bereits abgehandelt worden. Es folgen die (nicht alle ebenso kurzen) Paragraphen

D Geordnete und wohlgeordnete Mengen; Ordinalzahlen

E Kardinalzahltheorie

F Kombinatorische Mengenlehre (nicht vorgetragen)

G Mengenlehre als Sprache der Mathematik (nicht vorgetragen)

H Axiomatische Mengenlehre (nicht vorgetragen)

D. Geordnete und wohlgeordnete Mengen; Ordinalzahlen.

Eine Menge A heißt durch eine zweistellige Relation $<$ auf A **geordnet**, wenn $<$ transitiv, antisymmetrisch und auf A total ist, genauer: Wenn für jedes $a, b, c \in A$ gilt

α)	$a < b$ und $b < c \quad \Rightarrow \quad a < c$	(Transitivität)
β)	nicht zugleich $a < b$ und $b < a$	(Antisymmetrie)
γ)	$a < b$ oder $a = b$ oder $b < a$	(Vergleichbarkeit)

Aus der umfangreichen Theorie der geordneten Mengen möchte ich hier nur einen, schon von Cantor bewiesenen, Satz über die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen herausgreifen, dessen Verallgemeinerungen einen großen Teil der „Modelltheorie" ausmachen. Zunächst noch eine Definition:
Eine Menge A heißt **dicht geordnet**, wenn sie 1. geordnet ist und 2. die folgende Zusatzbedingung gilt

δ) für jedes $a, b \in A$ mit $a < b$ existiert (mindestens) ein $c \in A$ mit $a < c < b$.

Beispiele: $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ (mit der gewöhnlichen Kleiner-Relation) sind dicht, $\mathbb{Z}$ ist nicht dicht geordnet.

Satz von Cantor: Jede abzählbare, dicht geordnete Menge ohne kleinstes und größtes Element ist isomorph zu $(\mathbb{Q}, <)$

Zwei geordnete Mengen $(A, <_1)$ und $(B, <_2)$ heißen **isomorph** oder **ähnlich**, wenn es eine Bijektion f von A nach B gibt, so daß für jedes x, y aus A gilt: $x <_1 y$ genau dann, wenn $f(x) <_2 f(y)$.

Der Beweis geht so: Zuerst zeigen wir, daß man die Menge $(A, <)$ isomorph in $(\mathbb{Q}, <)$ (die Unterscheidungsindices bei den $<$-Zeichen sind fortgelassen) einbetten kann. Da A abzählbar ist, kann man die Elemente von A durchnumerieren, $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ (ohne Wiederholungen, auf irgendeine der vielen möglichen Arten). a_0 bilden wir auf eine beliebige rationale Zahl $f(a_0)$ ab; wenn das nächste Element a_1 größer ist (in A) als a_0, wählen wir als $f(a_1)$ eine beliebige rationale Zahl, die größer ist als $f(a_0)$, andernfalls eine beliebige kleinere. a_2 kann vor den beiden Elementen a_0 und a_1 liegen, oder dazwischen, oder dahinter; als $f(a_2)$ wählen wir eine analog zu $f(a_0)$ und $f(a_1)$ liegende (das geht, denn $\mathbb{Q}$ hat kein kleinstes und kein größtes Element und ist dicht geordnet). So fahren wir fort und erhalten schließlich für jedes a_i aus A ein Bild $f(a_i)$; diese Bilder sind alle voneinander verschieden, d.h. f ist eineindeutig (injektiv), und wenn $a_i < a_j$, so $f(a_i) < f(a_j)$ und umgekehrt; f ist eine Einbettung. Bei dem Beweis haben wir von A lediglich die Abzählbarkeit benutzt, von $\mathbb{Q}$ lediglich die Dichtheit der Ordnung; wir haben aber auch nur eine Einbettung, und nicht eine Isomorphie gefunden (denn wir wissen ja nicht, ob jede rationale Zahl als Bild bei f auftritt, d.h., ob f bijektiv ist). So haben wir zwar noch nicht den Satz von Cantor, aber bereits folgenden, ebenfalls wichtigen Satz bewiesen:

Jede abzählbare geordnete Menge läßt sich isomorph in $(\mathbb{Q}, <)$ einbetten.

Man sagt auch: $(\mathbb{Q}, <)$ ist **universell** in der Klasse der abzählbaren geordneten Mengen.

Um nun zu einer Isomorphie zu gelangen, müssen wir den Spieß umdrehen und die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ und die Dichtheit von A benutzen; dies liefert eine Einbettung g von $\mathbb{Q}$ in A. Aber leider haben g und f vielleicht gar nichts miteinander zu tun, so daß man wieder keine Bijektion hat. – Die bekommt man, wenn man Schritt für Schritt vorsichtiger zu Werke geht und immer abwechselnd von A nach $\mathbb{Q}$ und dann von $\mathbb{Q}$ nach A abbildet; folgendermaßen: $A = \{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ ist bereits abgezählt; wir zählen auch $\mathbb{Q}$ ab: $\mathbb{Q} = \{q_0, q_1, q_2, \ldots\}$. (Die Nummern bei diesen Abzählungen haben mit den jeweils vorhandenen Ordnungen nichts zu tun). Jetzt ordnen wir a_0 ein beliebiges Element von $\mathbb{Q}$ zu, etwa q_0. Dann suchen wir das erste (in der Numerierung von $\mathbb{Q}$) noch nicht benutzte Element von $\mathbb{Q}$, das ist q_1; diesem ordnen wir ein beliebiges Element von A zu, welches zu a_0 so liegt, wie q_1 zu q_0 (dabei benutzen wir die Dichtheit von A). Jetzt suchen wir das Element von A mit kleinster Nummer, das noch nicht, oder dem noch nichts, zugeordnet ist, und ordnen dem ein homolog gelegenes (im Vergleich zu den schon abgebildeten Elementen) Element von $\mathbb{Q}$ zu, und so weiter, immer im Zick-Zack-Verfahren.

Die so definierte Abbildung ist bijektiv: Denn jedes Element von A wird, wegen des minimalen Indexes, erfaßt, ebenso jedes Element von $\mathbb{Q}$, und wegen der Lagebedingung kein Element zweimal. Ebenfalls wegen der Lagebedingung ist die entstandene Abbildung ordnungstreu, insgesamt also eine Isomorphie.

Aus dem Satz von Cantor folgt sofort, daß je zwei abzählbare, dichte Ordnungen $(A, <)$ und $(B, <)$ ohne Randelemente zueinander isomorph sind; z.B. ist $(\mathbb{Q}, <)$ isomorph zu $(\mathbb{Q}^+, <)$.

Gibt es geordnete Mengen größerer Mächtigkeit, die einen dem Satz von Cantor entsprechenden Satz erfüllen?
$(\mathbb{R}, <)$ sicherlich nicht: Denn lassen wir aus $\mathbb{R}$ alle positiven irrationalen Zahlen fort, so bleibt eine dicht geordnete Menge von gleicher Mächtigkeit wie $\mathbb{R}$ übrig; zwischen $\mathbb{R}$ und dieser Menge kann es aber keine isomorphe Abbildung geben. (Begründung?).

Hausdorff hat (unter anderem!) die Frage nach Analoga zu $(\mathbb{Q}, <)$ von höherer Mächtigkeit untersucht (Hausdorff nannte sie η_α-Mengen). Bei diesen Untersuchungen führte er auch den wichtigen Begriff der „Konfinalität“ ein, auf den wir später zurückkommen (im Abschnitt E).

Wohlgeordnete Mengen.

Die Haupteigenschaft der durch $<$ geordneten Menge der natürlichen Zahlen ist, daß jede nichtleere Teilmenge T von $\mathbb{N}$ ein kleinstes Element hat; sie ermöglicht Beweise und Definitionen durch Induktion. Beliebige entsprechend geordnete Mengen heißen wohlgeordnet.

$(A, <)$ heißt **wohlgeordnet** genau dann, wenn $(A, <)$ geordnet ist und außerdem gilt: Jede nichtleere Teilmenge T von A hat ein kleinstes Element.

Wohlgeordnete Mengen haben ein erstes Element a_0 (setze $T := A$), ein zweites a_1 (setze $T := A \setminus \{a_0\}$), ein drittes, usw.; und diesen Prozeß kann man, falls die Menge A nicht vorher erschöpft ist, auch unendlich weit fortsetzen, wie bei den Ableitungen einer Punktmenge. Diese Möglichkeit, den Zählprozeß ins Unendliche hinein beliebig weit fortzusetzen, ist einer der wichtigsten Punkte der Mengenlehre.

(#) Beispiel: Die Menge $\{1, 2, 3, 4, \ldots 0\}$ mit der durch die angegebene Reihenfolge bestimmten Ordnung $<_1$ ist wohlgeordnet, aber anders als durch die übliche Ordnung $<$.

Betrachten wir die Struktur wohlgeordneter Mengen näher:

a sei ein Element von A; dann kann a das größte Element sein (z.B. 11 bei $A = \{0, 1, 2, 7, 11\}$); oder es gibt in A Elemente b, die größer sind als a. Dann hat die Menge $\{b \mid b \in A, a < b\}$ ein kleinstes Element b_0 (das durch a und A und $<$ eindeutig bestimmt ist). Wir nennen b_0 den unmittelbaren Nachfolger von a in $(A, <)$ und bezeichnen ihn mit a'.

Jetzt betrachten wir ein beliebiges Element x aus A. Dann kann

x das **erste Element** von A (bezüglich $<$) sein, oder

x kann Nachfolger eines Elements y von A sein, $x = y'$, oder

x ist nicht das erste Element, hat aber auch keinen unmittelbaren Vorgänger. (Im Beispiel (#) ist 0 ein derartiges Element).

Elemente von A der zweiten Art nennt man **Nachfolgelemente**, Elemente der dritten Art **Limeselemente**.

Keine mehrpunktige wohlgeordnete Menge ist dicht geordnet; denn zwischen a und a' liegen keine Elemente. Dagegen liegen zwischen einem Element a und einem größeren Limeselement b unendlich viele Elemente.

Noch eine technische Definition, die häufig bequem ist: für $a \in A$ sei

$$(A, <)_a := \{x \in A \mid x < a\} \quad \textbf{(der durch } a \textbf{ bestimmte Abschnitt von } (A, <)\textbf{).}$$

Der folgende Hilfssatz ist der am häufigsten benutzte Satz über wohlgeordnete Mengen.

Keine wohlgeordnete Menge ist einem ihrer Abschnitte ähnlich.

Beweis. Wenn es eine ähnliche Abbildung f von $(A, <)$ auf einem Abschnitt $(A, <)_a$ gäbe, müßte $f(a) < a$ sein (da der Nachbereich nur aus Elementen besteht, die kleiner sind als a); aus dieser Ungleichung folgte wegen der Ähnlichkeit $f(f(a)) < f(a)$, $f(f(f(a))) < f(f(a)), \ldots$ usw; es würde dann eine unendlich lange, absteigende Kette von Elementen von A geben, und die hätte kein kleinstes Element.

Wohlgeordnete Mengen lassen, wie die natürlichen Zahlen, Beweise und Definitionen durch Induktion zu (hier spricht man allerdings von Rekursion).
Der Satz vom **Beweis durch Rekursion** lautet: $(A, <)$ sei wohlgeordnet. Dann gilt für jedes $a \in A$ die Aussage H, falls folgendes gilt: Für jedes a aus A: (Wenn H auf jedes $x < a$ zutrifft, so auch auf a).
Dies entspricht nicht dem Schluß von „n auf $n+1$“, sondern dem von „$< n$ auf n“; man braucht diese allgemeinere Formulierung bei Limeselementen.

Auf den Satz von der **Definition durch Rekursion** (Rekursionssatz) möchte ich hier nicht eingehen.

Gegeben seien zwei wohlgeordnete Mengen $(A, <_1)$ und $(B, <_2)$; wir wollen versuchen, sie zu vergleichen.

A hat ein erstes Element a_0, B hat eines: b_0. Wir ordnen dem a_0 das b_0 zu. Wenn A noch weitere Elemente hat, ordnen wir dem zweiten Element von A das zweite Element von B zu (falls es das nicht gibt, hört der Prozeß auf); usw.. Gelangen wir so zu einem Limeselement a^* von A, so ordnen wir diesem das kleinste Element von B zu, welches größer ist als alle den vor a^* liegenden Elementen von A zugeordneten Elementen von B (das schreibt sich in Formeln besser hin: $f(a^*) =$ das erste Elemente von $B \setminus \{f(x) \mid x < a^*\}$), falls es das noch gibt; dieses muß dann ein Limeselement von B sein. Diesen Prozeß können wir so lange fortsetzen, bis A (oder auch B) erschöpft ist. Die Zuordnung liefert eine eineindeutige und ordnungstreue Abbildung; es gibt drei Fälle

1) A ist zuerst erschöpft, B noch nicht.
   Dann gibt es ein Element b aus B, so daß $(A, <) \cong (B, <)_b$.

2) A und B werden zugleich ausgeschöpft.
   Dann gilt $(A, <) \cong (B, <)$.

3) B ist zuerst erschöpft. Dann existiert $a \in A$, so daß $(A, <)_a \cong (B, <)$.

Dies ist der **Vergleichbarkeitssatz für wohlgeordnete Mengen.** Man beweist schnell, daß der Isomorphismus eindeutig festgelegt ist.

So haben wohlgeordnete Mengen eine ziemlich einheitliche Struktur; eigentlich unterscheiden sie sich nur durch ihre „Länge“, d.h. darin, wie weit man den Fortschreitungsprozeß iterieren kann. Diese „Länge" könnte man die „Ordinalzahl" der wohlgeordneten Menge nennen.

Ordinalzahlen

Cantor hatte definiert[78]: *Der Ordnungstypus $\overline{M}$ einer geordneten Menge M ist der Allgemeinbegriff, welcher sich aus M ergibt, wenn unter Festhaltung der Rangordnung ihrer Elemente von der Beschaffenheit der letzteren abstrahiert wird ...; den Ordnungstypus einer wohlgeordneten Menge f nennen wir die ihr zukommende „Ordnungszahl".*

Kann man den genannten „Allgemeinbegriff" konkreter fassen? Nach einem (wohl auf Frege oder Russell zurückgehenden) Vorschlag könnte man die ganze Klasse aller zu $(A, <)$ ähnlichen (d.h. isomorphen) wohlgeordneten Mengen als Ordinalzahl von $(A, <)$ wählen (man muß die Ordnungsrelation immer nennen; denken Sie an die beiden bereits benutzten Ordnungen von $\mathbb{N}$: die gewöhnliche Kleiner-Relation und die, bei der die Zahl 0 ganz hinten steht). Das führt aber zu ebenfalls ziemlich unübersichtlichen, großen Gebilden, die nicht unproblematisch sind; darüber werde ich später noch sprechen.

Man kann aber vielleicht auch ganz bestimmte, wohlgeordnete Mengen auszeichnen, in jeder der eben genannten Ähnlichkeitsklassen genau eine, und dann diese ausgezeichneten Mengen als Ordinalzahlen benutzen. Das ist, nach einem Vorschlag von J.v. Neumann, möglich. Es wird in fast allen neueren Büchern über Mengenlehre so gemacht, aber auf den ersten Blick erscheint es vielleicht etwas künstlich; deshalb möchte ich es erläutern.

Mengen können als Elemente ebenfalls Mengen haben; das braucht man z.B. in der Topologie, wo man die Topologie eines Raumes durch das System, d.h. die Menge, der offenen Mengen des Raumes festlegt; oder betrachten Sie als Beispiel die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ einer Menge M (das ist die Menge aller Teilmengen von M).

Ich will mit einer einfachen Menge anfangen, nämlich der leeren Menge $\emptyset$, und einige andere konstruieren, z.B. die folgenden fünf:

$$\begin{aligned}
A &= \{\emptyset\}, \\
B &= \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \\
C &= \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}, \\
D &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
E &= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}.
\end{aligned}$$

Da die Elemente dieser Mengen auch wieder Mengen sind, kann zwischen diesen Elementen die Elementbeziehung bestehen (oder auch nicht); bei A besteht sie nicht; bei B zwischen dem linken Element $\emptyset$ und dem rechten $\{\emptyset\}$; bei C besteht sie nicht; bei D zwischen dem linken und dem mittleren, dem linken und dem rechten und zwischen dem mittleren und

[78] Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. §14 Anfang, (Mathematische Annalen 49).

dem rechten; bei E schließlich zwischen dem 1. und dem 2., dem 1. und dem 4., dem 2. und dem 3., dem 2. und dem 4..
(Wie sieht die $\in$-Relation auf der Menge $\{\emptyset, A, B, C, D, E\}$ aus?).

Wir brauchen noch eine technische Definition. Eine **Menge** (!) M heißt **transitiv**, wenn jedes Element eines Elementes von M selbst Element von M ist; anders gesagt: wenn jedes Element von M eine Teilmenge von M ist. Z.B. sind die Mengen A, B, D und E transitiv, aber die $\in$-Relation auf E ist nicht transitiv (es gelten $\emptyset \in \{\emptyset\}$ und $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$, aber nicht $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$).

Die Menge B und ebenfalls die Menge D sind durch die $\in$-Relation geordnet (und damit auch wohlgeordnet: jede endliche geordnete Menge ist wohlgeordnet); die $\in$-Relation auf C ist nicht total (die beiden Elemente sind nicht vergleichbar), die bei E ist weder total, noch transitiv.

Jetzt nehmen wir eine beliebige wohlgeordnete Menge $(A, <)$ und konstruieren zu dieser Menge eine isomorphe, bei der die Wohlordnung durch die $\in$-Relation gegeben wird (den zu konstruierenden Isomorphismus bezeichnen wir mit f):

Das erste Element a_0 von A	bilden wir ab auf die leere Menge $\emptyset$,
das zweite Element a_1	auf die Menge $\{\emptyset\}$.
das dritte a_2	auf $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$\vdots$	$\vdots$
das n-te	auf $\{f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_{n-1})\}$

allgemein: das Element a von A auf $f(a) := \{f(b) \mid b \in A, b < a\}$.
Nach dem Satz von der Definition durch Rekursion, angewendet auf die wohlgeordnete Menge $(A, <)$, liefert das eine Funktion f von A auf eine Menge M ($M :=$ Nachbereich von f), die ordnungstreu ist (aus $b < a$ in A folgt $f(b) \in f(a)$) und bijektiv (wie man leicht sieht). Außerdem hat M die folgende Eigenschaft: Wenn $x \in M$ und $y \in x$, so ist auch $y \in M$; denn sei $x = f(a)$ und $y \in x$, so gibt es ein $b \in A$, $b < x$, mit $y = f(b)$.

Man kann (leicht) beweisen, daß es nur ein einziges transitives $\in$-System $(M, \in)$ gibt, auf welches $(A, <)$ isomorph abgebildet werden kann (und daß auch die isomorphe Abbildung eindeutig bestimmt ist; man nennt sie auch den **Mostowski-Isomorphismus**).

Sei nun eine andere, zu $(A, <)$ ähnliche wohlgeordnete Menge $(B, <_1)$ gegeben, und zu $(B, <_1)$ das isomorphe $\in$-System $(L, \in)$ konstruiert. Dann sieht man sofort, daß $L = M$ ist (a_0 wird auf $\emptyset$ abgebildet, b_0 ebenfalls; a_1 auf $\{f(a_0)\} = \{\emptyset\}$, b_1 auf $\{g(b_0)\} = \{\emptyset\}$, und so fort, durch Induktion auf $(A, <)$).

Jetzt wählt man als Ordinalzahlen diese transitiven $\in$-Systeme, und nennt das zu $(A, <)$ isomorphe derartige System **die Ordinalzahl** $\text{odz}(A, <)$ von $(A, <)$. Dann erhalten ähnliche wohlgeordnete Mengen dieselbe Ordinalzahl, und wenn $(B, <_1)$ „kürzer“[79] ist als $(A, <)$, so ist odz$(B, <_1)$ Element von odz$(A, <)$, nämlich das Element $f(a)$, wenn $f : A \to$ odz$(A, <)$ die zu A gehörende isomorphe Abbildung ist.

Demgemäß definieren wir für Ordinalzahlen α und β

$$\alpha < \beta \quad \text{:gdw} \quad \alpha \in \beta,$$

anders gesagt: Jede Ordinalzahl ist die Menge aller kleineren Ordinalzahlen.

Diese (und noch weitere derartige) Eigenschaften machen die von Neumannsche Definition der Ordinalzahlen so bequem zum Arbeiten; z.B. ist jede Menge M von Ordinalzahlen durch die $\in$-Relation wohlgeordnet. Das kleinste Element ist $\bigcap M$. Auch die Klasse **On** aller Ordinalzahlen ist wohlgeordnet; diese Klasse ist allerdings so groß, daß man damit vorsichtig umgehen muß (vgl. Seite 154).

Jede Ordinalzahl α hat einen unmittelbaren Nachfolger α', $\alpha' := \alpha \cup \{\alpha\}$.

Nicht jede Ordinalzahl ist unmittelbarer Nachfolger, z.B. nicht die kleinste Ordinalzahl $0 (:= \emptyset)$, und auch nicht die Zahl, welche der dem Element 0 in dem Beispiel (#) auf Seite 136 entspricht; man nennt sie, seit Cantor, ω; sie ist die kleinste unendliche Ordinalzahl. Ordinalzahlen (außer der 0) ohne unmittelbaren Vorgänger nennt man Limes(ordinal)zahlen. Diese Einteilung entspricht derjenigen der Elemente von wohlgeordneten Mengen. Allgemein kann man an Stelle der Ordnungsstruktur von wohlgeordneten Mengen die von Ordinalzahlen untersuchen, was oft übersichtlicher ist.

Mit Ordinalzahlen kann man rechnen; die Rechenoperationen kann man auf zweierlei Arten erklären:

1) durch Hantieren mit Repräsentanten der Ordinalzahlen, d.h. geeigneten wohlgeordneten Mengen,

2) durch Rekursion.

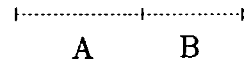
Das zweite Verfahren ist eleganter. Da ich Ihnen jedoch hier den dazu erforderlichen Apparat aus Zeitmangel nicht entwickeln kann (ich halte ja keine systematische Vorlesung über Mengenlehre), skizziere ich bei der Addition und der Multiplikation die erste, bei der Potenz die zweite Methode.

Addition:

Seien $\alpha, \beta \in On$ und $(A, <_1), (B, <_2)$ wohlgeordnete Mengen, so daß $\alpha =$ odz$(A, <_1)$, $\beta =$odz$(B, <_2)$. Da A und B nicht disjunkt zu sein brauchen, denken wir sie uns zunächst

[79] d.h. es gibt ein a aus A mit $(B, <_1) \cong (A, <)_a$.

disjunkt gemacht, ohne Veränderung der Ordnung. Sei also $A \cap B = \emptyset$. Wir legen jetzt die Mengen A und B nebeneinander



und ordnen $A \cup B$ so, daß zunächst alle Elemente von A (mit ihrer Ordnung $<_1$) und dann alle Elemente von B (mit der Ordnung $<_2$) kommen; außerdem soll jedes Element von A kleiner sein als jedes Element von B.
Man sieht leicht, daß dies eine Wohlordnung von $A \cup B$ ist, wir nennen sie $<_3$, und daß, wenn man mit zu A bzw. B ähnlichen wohlgeordneten Mengen arbeitet, man zu einem isomorphen Resultat kommt. Jetzt können wir definieren

$$\alpha + \beta := \mathrm{odz}\,(A \cup B, <_3).$$

Die so definierte Addition von Ordinalzahlen ist assoziativ, aber nicht kommutativ.
Beispiel:

$\omega + 1 = \mathrm{odz}\,(\mathbb{N}, <_1)$ (Beispiel #, Seite 136)	hat ein größtes Element	$\bullet\bullet\bullet\bullet\ldots\bullet$
$1 + \omega = \omega$	hat kein größtes Element	$\bullet\ \bullet\bullet\bullet\bullet\ldots$

Der Augend 1 wird von dem Addenden ω (diese Unterscheidung fand ich noch in einem Schulbuch von 1924) absorbiert. Die Untersuchung, wann derartige Absorptionen auftreten, ist interessant. Bei „endlichen“ Ordinalzahlen (wir könnten sie etwa definieren als solche, die kleiner sind als die erste Limeszahl) treten sie aber nicht auf, und es gelten dann alle Rechenregeln, die wir von den natürlichen Zahlen her kennen.

Multiplikation:
Im Produkt $\alpha \cdot \beta$ fassen wir β als Multiplikator auf; demgemäß ersetzen wir jedes Element von β durch ein Exemplar von α, und diese Exemplare legen wir in der durch β gegebenen Reihenfolge nebeneinander. So entsteht eine Wohlordnung, und wir definieren

$$\alpha \cdot \beta := \quad \text{die Ordinalzahl dieser Wohlordnung.}$$

(Formalere Definitionen sind möglich; z.B. versehe man das Mengenprodukt $\alpha \times \beta$ mit der antilexikographischen Wohlordnung).
Auch die Multiplikation ist assoziativ, aber im allgemeinen nicht kommutativ.
Beispiel:

$\omega \cdot 2 = \omega + \omega$	$\bullet\bullet\bullet\bullet\ldots\bullet\bullet\bullet\bullet\ldots$
$2 \cdot \omega = \omega,$	$\bullet\bullet\ \bullet\bullet\ \bullet\bullet\ \bullet\bullet\ \bullet\bullet\ \bullet\bullet\ \ldots$

Von den Distributivgesetzen gilt nur das eine: $\alpha \cdot (\beta_1 + \beta_2) = \alpha \cdot \beta_1 + \alpha \cdot \beta_2$. (Gegenbeispiel gegen das andere: $(\omega + 1) \cdot \omega$ ist gleich ω^2, da das größte Element jedes Summanden von dem folgenden Summanden absorbiert wird. Dagegen ist $\omega \cdot (\omega + 1) = \omega^2 + \omega \neq \omega^2$, denn

ω^2 ist ein Abschnitt von $\omega^2 + \omega$.). Wiederum gelten bei endlichen Faktoren jedoch alle von der Arithmetik auf $\mathbb{N}$ her gewohnten Gesetze. Die **Potenz** α^β definiert man besser rekursiv über β, je nachdem ob $\beta = 0$, $\beta = \gamma + 1$ oder β eine Limeszahl ist. Wir setzen

$$\begin{array}{lll} \alpha^0 & := & 1, \\ \alpha^{\gamma+1} & := & \alpha^\gamma \cdot \alpha, \\ \alpha^\beta & := & \sup(\alpha^\gamma \mid \gamma < \beta) \quad \text{falls} \quad \beta \quad \text{Limeszahl.} \end{array}$$

Jetzt können wir uns einen Überblick über den Anfang (!) der Klasse On machen:

$$\begin{array}{l}
0, 1, 2, 3, 4, \ldots 486, \ldots \quad \omega, \quad \omega + 1, \quad \omega + 2, \ldots \quad \omega + \omega, \\
\omega + \omega + 1, \ldots \quad \omega \cdot 3, \ldots \quad \omega \cdot 4, \ldots \omega \cdot \omega, \quad \ldots \omega^2 + 1, \ldots \omega^2 + \omega, \ldots \quad \omega^2 \cdot 2, \ldots \\
\omega^3 + \omega^2 \cdot 2 + \omega \cdot 5 + 7, \quad \omega^3 + \omega^2 \cdot 2 + \omega \cdot 5 + 8, \ldots \\
\omega^\omega, \omega^\omega + 1, \ldots \quad \omega^\omega \cdot \omega, \ldots \quad (\omega^\omega)^\omega, \ldots \\
\omega^{(\omega^\omega)}, \ldots \\
\vdots \\
\epsilon_0^{*)}, \ldots \\
\omega_1, \ldots \quad \omega_1 + 1, \ldots \quad \omega_1 + \omega, \ldots \quad \omega_1 + \omega^\omega + 3, \ldots \quad \omega_1^2, \ldots \quad \omega_1^\omega, \ldots \quad \omega_1^{\omega_1} \\
\vdots \\
\omega_2, \ldots \\
\vdots \\
\omega_3, \\
\vdots \\
\omega_\omega, \quad \omega_\omega + 1, \ldots \quad (\omega_\omega)^{\omega_1}, \ldots \\
\vdots \\
\omega_{\omega+1}, \quad \omega_{\omega+1} + 1, \ldots \\
\vdots \\
\omega_{(\omega_\omega)}, \ldots \quad \omega_{\left(\omega_{(\omega_\omega)}\right)}, \ldots \quad \omega_{\omega_{\omega_{\omega_\omega}}}, \ldots \quad \omega_{\omega_{\omega_{\omega_{\ldots}}}}, \ldots \\
\vdots
\end{array}$$

*) ϵ_0 wird auf der folgenden Seite erklärt

Die Reihe beginnt mit den endlichen Ordinalzahlen; dann folgt die erste unendliche Ordinalzahl ω (das ist auch die erste Limeszahl). ω und die zunächst folgenden Zahlen sind abzählbar, über ein sehr weites Stück hinweg. Es müssen jedoch auch überabzählbare Ordinalzahlen folgen (z.B. wegen des Satzes von Cantor über die Potenzmenge und des Wohlordnungssatzes); die kleinste überabzählbare nennt man ω_1. Es folgen viele zu ω_1 gleichmächtige, aber schließlich doch einmal eine von höherer Mächtigkeit, ω_2; und so fort, unvorstellbar weit.

Nach Cantor faßt man Ordinalzahlen derselben Mächtigkeit zu **Zahlklassen** zusammen; etwas unsystematisch tut man in die erste Zahlklasse alle endlichen Ordinalzahlen, in die zweite alle abzählbaren, allgemein (für unendliche α) in $\mathcal{Z}(\alpha)$ alle zu α gleichmächtigen Ordinalzahlen.

Die drei Rechenoperationen führen aus den Zahlklassen nicht heraus: bei endlichen Argumenten liefern sie endliche Resultate, bei abzählbaren abzählbare usw.. Merkwürdig ist aber, daß man, trotz der großen Vielfalt der Kombinationsmöglichkeiten von Summen, Produkten und Potenzen, ausgehend von 1 und ω, nicht nur ω_1 nicht erreichen, sondern von der zweiten Zahlklasse dadurch nur ein ganz kleines Anfangsstück erfassen kann. (Die eben genannten Terme bleiben dann alle unterhalb einer gewissen abzählbaren Ordinalzahl, welche ϵ_0 genannt wird). Der verbleibende Rest der zweiten Zahlklasse übersteigt unser konkretes Vorstellungsvermögen bei weitem, und um wieviel mehr tun das die zu höheren Mächtigkeiten gehörenden Zahlklassen. Gewiß existieren über diese höheren Mächtigkeiten Sätze; aber diese drücken wohl eher logisch-kombinatorische Beziehungen aus, als daß sie getreue Bilder einer realen Wirklichkeit sind.

Der Wohlordnungssatz.

Cantor war überzeugt, daß sich jede Menge wohlordnen lassen müsse (versuchen Sie es einmal bei $\mathbb{R}$!); ein Beweis ist aber erst 1904 Zermelo gelungen, der dazu einen hochgradig nicht konstruktiven Hilfssatz, das Auswahlaxiom (so genannt, weil es nicht gelungen war, den Hilfssatz zu beweisen) benutzte. Das **Auswahlaxiom** besagt: Zu jedem System (beliebig hoher Mächtigkeit) von nichtleeren, paarweise disjunkten Mengen gibt es eine Menge A, so daß die Durchschnitte von A mit den Mengen des Systems alle einelementig sind; A wählt aus jeder Menge des Systems gerade ein Element aus.

Eine äquivalente, Topologen sicherlich handlichere, Formulierung ist: Das kartesische Produkt von beliebig vielen nichtleeren Mengen ist nicht leer.

Und wieder eine andere Formulierung: M sei eine Menge; dann gibt es eine Funktion f von der Menge $\mathfrak{P}^*(M) := \mathfrak{P}(M) \setminus \{\emptyset\}$ der nichtleeren Teilmengen von M nach M, die jeder nichtleeren Teilmenge T von M eines ihrer Elemente zuordnet.

Bei endlichen Mengensystemen gilt das Auswahlaxiom; man kann es durch Induktion über die Anzahl der Mengen des Systems beweisen. Aber schon bei abzählbar vielen zweielementigen Mengen ist es problematisch. Aus unendlich vielen Paaren Schuhen kann ich leicht auswählen: alle linken. Was mache ich aber mit unendlich vielen Paaren Strümpfen?

Zermelo benutzt die Potenzmengenform des Auswahlaxioms und verwendet wieder das Weiterzählargument, welches wir von den iterierten Ableitungen und vom Beweis des Vergleichbarkeitssatzes her kennen, in folgender Weise: M sei die Menge, die wohgeordnet werden soll; f sei die Auswahlfunktion aus $\mathfrak{P}^*(M)$. Die zu konstruierende Wohlordnung $<$ von M soll

$f(M)$	als 1. Element a_0
$f(M \setminus \{a_0\})$	als 2. Element a_1
$f(M \setminus \{a_0, a_1\})$	als 3. Element a_2

haben. Wie macht man den „unendlichen Schritt"? Entweder benutzt man die Theorie der Ordinalzahlen, genauer den Satz über die Definition durch Rekursion, und betrachtet dabei Limeszahlen, oder aber man bewältigt ihn durch einen grandiosen technischen Einfall Zermelos (der in ganz ähnlicher Form beim Beweis des eben erwähnten Rekursionssatzes benutzt wird[80]. Damit kann man dann die Numerierung der Elemente von M, stets unter Benutzung der Auswahlfunktion f, auch ins Unendliche fortsetzen, bis ganz M durchnumeriert, und damit wohlgeordnet, ist.

Damit ist der Wohlordnungssatz bewiesen: Zu jeder Menge M gibt es eine Relation $<$, die Wohlordnung auf M ist.

Da das Auswahlaxiom eine reine Existenzbehauptung ist, ohne jeden Hinweis, wie denn eine Auswahlfunktion etwa konstruiert oder approximiert werden könnte (wenn man die Funktion konstruieren könnte, würde man das Axiom nicht brauchen), hat man auch gar keinen Hinweis, wie denn die Wohlordnung tatsächlich aussieht. Wegen seines nicht konstruktiven Charakters wurde die Verwendung des Auswahlaxioms von L.E.J. Brouwer und seinen Nachfolgern (intuitionistische bzw. konstruktive Mathematik) nicht akzeptiert. Das gleiche gilt für den Wohlordnungssatz, aus dem man sehr leicht auch das Auswahlaxiom herleiten kann.

Zum Auswahlaxiom gibt es viele äquivalente Formulierungen. In der Algebra benutzt man häufig eine ordnungstheoretische Formulierung, die Zornsches Lemma genannt wird, da Max Zorn sie 1935 in einer Arbeit über Algebra benutzt hat; nahezu die gleiche Formulierung findet sich bereits in dem Buch von Hausdorff (1914).

Benutzt wird das Auswahlaxiom (oft AC = Axiom of Choice, abgekürzt) in der Mathematik überaus oft; z.B. bei den Beweisen von

[80]Der Beweis des Rekursionssatzes für beliebige Ordinalzahlen wurde erst 1923 durch J. von Neumann geführt; allerdings hatte ihn für $\mathbb{N}$ Dedekind schon 1888 angegeben (in: Was sind und was sollen die Zahlen).

Jeder Vektorraum hat eine Basis.

Die Vereinigung von abzählbar vielen abzählbaren Mengen ist abzählbar[81].

Zu jeder Funktion f von A **auf** B gibt es eine Funktion g von B nach A, so daß für jedes b aus B die Beziehung $f(g(b)) = b$ gilt (Existenz einer rechtsinversen Funktion zu jeder Surjektion).

E. Kardinalzahlen

Vor dem eigentlichen Thema möchte ich kurz einen anderen Punkt streifen, die Vergleichbarkeit von beliebigen Mengen. Wir nennen A einbettbar in B, wenn eine eineindeutige Abbildung f von A in B existiert; wir schreiben $A \lessdot B$.
Die Einbettbarkeit ist eine reflexive und transitive Relation: Es gelten $A \lessdot A$ und $A \lessdot B$ und $B \lessdot C \Rightarrow A \lessdot C$. Cantor hat vermutet, daß aus gegenseitiger Einbettbarkeit die Gleichmächtigkeit folgt:

$$(A \lessdot B \quad \text{und} \quad B \lessdot A) \quad \Rightarrow \quad A \text{ glm } B\,;$$

den Beweis dieses **Äquivalenzsatzes** führte aber erst Bernstein (1898)[82] (zuweilen findet man ihn mit dem Auswahlaxiom in Verbindung gebracht; mit dem hat er aber gar nichts zu tun). Der Äquivalenzsatz erleichtert sehr den Nachweis der Gleichmächtigkeit. Während Bijektionen zwischen zwei Mengen oft gar nicht leicht anzugeben sind, z.B. zwischen $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ und $\mathbb{R}$, ist es oft sehr einfach, zwei Injektionen zu konstruieren.

Sehr eng mit dem Auswahlaxiom zusammen hängt dagegen die Vergleichbarkeit von beliebigen Mengen A und B. Gilt die Aussage „$A \lessdot B$ oder $B \lessdot A$“ ?

---

[81] Der Satz „Die Vereinigung von abzählbar vielen **abgezählten** Mengen ist abzählbar“ läßt sich ohne Auswahlaxiom mittels des 1. Cantorschen Diagonalverfahrens beweisen. $A_i, i \in \mathbb{N}$, seien die gegebenen Mengen (welche wir ohne Einschränkung als paarweise disjunkt annehmen können), und für jedes i sei $(a_{ij} \mid j \in \mathbb{N})$ eine Abzählung (ohne Wiederholungen) von A_i. Dann ist φ mit

$$\varphi(a_{ij}) := \frac{1}{2}(i+j)(i+j+1)+i$$

eine Bijektion von $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ auf $\mathbb{N}$.
Bei dem Satz „Die Vereinigung von abzählbar vielen **abzählbaren** Mengen ist abzählbar“ können wir dieses Verfahren nicht ohne weiteres anwenden, da wir die Zeilen der Matrix nicht haben: wir wissen nur, daß es zu jedem A_i eine Abzählung gibt (vielleicht sehr viele). Mit dem Auswahlaxiom können wir aber für jedes $i \in \mathbb{N}$ aus der nichtleeren Menge der Abzählungen von A_i eine Abzählung auswählen; mit diesen Abzählungen können wir die Matrix hinschreiben und das Diagonalverfahren anwenden.

[82] Im Buch von A. Levy, Basic Set Theory (Springer Verlag 1979) findet sich dazu folgende Bemerkung (Seite 85) „2.8. The Cantor-Bernstein Theorem (Proved by Dedekind in 1887 – see Dedekind 1932, p. 447, conjectured by Cantor 1895, proved by Bernstein in 1898 – see Borel 1898).“

Aus AC folgt der Vergleichbarkeitssatz; denn dann gilt der Wohlordnungssatz. Seien also $<_1$ und $<_2$ beliebige Wohlordnungen von A bzw. von B; dann sind die wohlgeordneten Mengen $(A, <_1)$ und $(B, <_2)$ miteinander vergleichbar, die eine also ähnlich abbildbar in die andere. Jede ähnliche Abbildung ist aber insbesondere eine Injektion. - Man kann zeigen, daß die Vergleichbarkeit von beliebigen Mengen zum Auswahlaxiom äquivalent ist (Hartogs 1915, Mathematische Annalen 76). Wenn man gleichmächtige Mengen als nicht (wesentlich) verschieden ansieht, hat also die Einbettbarkeit $\lessdot$ die Eigenschaft einer Halbordnung, bei Annahme des Auswahlaxioms sogar einer totalen Ordnung. Damit kommen wir zum eigentlichen Thema dieses Abschnitts.
Die Gleichmächtigkeitsrelation zwischen Mengen:

$$A \operatorname{glm} B \quad \text{genau dann, wenn es eine Bijektion} \quad f : A \longrightarrow B \quad \text{gibt,}$$

ist eine Äquivalenzrelation, d.h. es gelten für alle Mengen A, B, C, die drei Gesetze

$$\begin{array}{ll} A \operatorname{glm} A & \text{(Reflexivität),} \\ A \operatorname{glm} B \Rightarrow B \operatorname{glm} A & \text{(Symmetrie),} \\ (A \operatorname{glm} B \text{ und } B \operatorname{glm} C) \Rightarrow A \operatorname{glm} C & \text{(Transitivität).} \end{array}$$

Äquivalenzklassen nach dieser Relation sind die Klassen gleichmächtiger Mengen. Kardinalzahlen sollen diese Klassen charakterisieren: Jeder Menge A soll eine Kardinalzahl $|A|$ zugeordnet werden, so daß gilt

$$\text{für alle Mengen } A \text{ und } B: \quad |A| = |B| \quad \text{gdw} \quad A \quad \operatorname{glm} \quad B \tag{$*$}$$

Wir haben hier das gleiche Problem wie bei der Definition der Ordinalzahlen: Welche Objekte kann man zu diesem Zweck nehmen? Die ganzen Äquivalenzklassen sind zu groß; eine Wohlordnung und den darauf beruhenden Mostowski-Isomorphismus auf ein transitives Mengensystem, welche wir bei Ordinalzahlen hatten, haben wir diesmal nicht. Was tun?

(Braucht man Kardinalzahlen überhaupt? Theoretisch kann man alles, was man mit Kardinalzahlen ausdrücken kann, wegen der Bedingung (*) auch durch die Gleichmächtigkeit ausdrücken; da, wie wir sehen werden (im Gegensatz zum Rechnen mit Ordinalzahlen), weite Teile der Kardinalzahlarithmetik sehr einfach sind, könnte man vielleicht auch dabei auf Kardinalzahlen verzichten. Anders ist es bei unendlichen Summen und Produkten, und bei der Potenz; hier würden die kardinalzahlfreien Versionen der Formeln kaum noch aufschreibbar sein).

Wie oft, hilft auch hier das Auswahlaxiom; und da die meisten Mathematiker vorgeben, an das Auswahlaxiom zu glauben, wird die folgende Methode jetzt fast überall benutzt.

Wir wollen zu der Menge A eine Kardinalzahl finden. Nach dem Auswahlaxiom gibt es auf A eine Wohlordnung (i.a. sogar viele, nicht zueinander ähnliche; denken Sie an $<$ und $<_1$ auf $\mathbb{N}$), und die mit dieser Wohlordnung versehene Menge A hat eine Ordinalzahl. Wenn man eine andere Wohlordnung nimmt, erhält man allerdings möglicherweise eine andere Ordinalzahl. Nun haben aber alle hier möglichen Wohlordnungen dieselbe Grundmenge, nämlich A; die entsprechenden Ordinalzahlen müssen also alle zueinander gleichmächtig sein, d.h. alle in derselben Zahlklasse (vgl. Seite 143) liegen. Die **Anfangszahl**, d.h. die erste Zahl dieser Zahlklasse, ist eindeutig durch A bestimmt; wir wählen diese Anfangszahl als Kardinalzahl $|A|$ von A. Die Bedingung (*) ist dann erfüllt.

Kardinalzahlen sind demnach spezielle Ordinalzahlen. Gibt es eine charakteristische Eigenschaft, die sie unter den Ordinalzahlen auszeichnet (nicht gerade die triviale, „Kardinalzahl einer Menge sein")? — Ja, und zwar „Anfangszahl sein", oder ausführlicher: α ist eine **Kardinalzahl** genau dann, wenn α eine Ordinalzahl ist, welche nicht gleichmächtig zu einer kleineren Ordinalzahl als α ist.

Demnach sind zunächst einmal alle endlichen Ordinalzahlen α Kardinalzahlen (Beweis durch Induktion über α), und ω ist eine Kardinalzahl; die nächste ist ω_1, dann kommt ein noch größerer Sprung zu ω_2, usf., nach vielen unendlich vielen Schritten kommt die ω-te unendliche Kardinalzahl ω_ω (!), danach zunächst einmal eine unvorstellbare Menge von Ordinalzahlen und dann die Kardinalzahl $\omega_{\omega+1}$, ... ohne jedes Ende.

Die Funktion, die wir eben zur Durchzählung der unendlichen Kardinalzahlen benutzt haben, nennt man die **Alephfunktion**

$$\aleph : \mathrm{On} \longrightarrow \text{Klasse der unendlichen Ordinalzahlen}$$

und wir haben $\aleph(0) = \omega$, $\aleph(1) = \omega_1$, ... $\aleph(\omega) = \omega_\omega$, ... Häufig (meistens?) schreibt man aber $\aleph_0$ (statt ω_0 oder ω), $\aleph_1$ statt ω_1 usw.. (Bei Kardinalzahldefinitionen, die nicht das Auswahlaxiom benutzen, numeriert die $\aleph$-Funktion nicht alle Kardinalzahlen durch, sondern nur diejenigen wohlordnungsfähiger Mengen. Bei unserer Definition fällt dieser Unterschied fort).

Bemerkenswert ist folgendes Paradoxon: Die Alephfunktion überspringt gleich zu Anfang abzählbar unendlich viele Ordinalzahlen, dann im 1. Schritt überabzählbar viele, dann bei $\aleph_2$ noch mehr, und die Werte laufen den Argumenten immer rascher davon. Dennoch holen die Argumente die Werte zuweilen wieder ein: Es gibt Kardinalzahlen, welche sich selbst als Index haben. Man kann sich das schwer vorstellen, es aber leicht beweisen: Wir betrachten folgende Funktion η von $\omega + 1$ in die Klasse **Card** aller Kardinalzahlen:

$$\eta(0) := \omega, \quad \eta(1) := \omega_\omega, \quad \eta(2) := \omega_{(\omega_\omega)}, \quad \eta(n+1) = \omega_{\eta(n)}$$

und definieren für die Limeszahl ω als Argument den Funktionswert durch

$$\eta(\omega) := \sup\{\eta(n) \mid n < \omega\}$$

Dann ist

$$\eta(\omega) = \omega_{(\omega_{(\omega_{(\omega_{(\ldots)})})})} = \omega_{\eta(\omega)}.$$

Die Tabelle auf Seite 142 hört mit dieser Kardinalzahl auf, aber die Reihe der Ordinalzahlen, und auch der Kardinalzahlen, geht immer weiter.

Funktionen von On nach On, die ähnlich definiert werden[83], nennt man Normalfunktionen; unsere Zahl $\eta(\omega)$ ist ein Fixpunkt der Normalfunktion η. Es läßt sich beweisen, daß jede Normalfunktion beliebig große Fixpunkte hat. Die doch gewiß nicht kleine Kardinalzahl $\eta(\omega)$ ist übrigens unter den sogenannten „großen Kardinalzahlen", welche heute viel untersucht werden, ein Zwerg; ja, sie zählt nicht einmal dazu.

Die Definitionen der Summe und des Produktes von zwei Kardinalzahlen sind einfacher als die entsprechenden von Ordinalzahlen, da wir nicht auf Wohlordnungen achten müssen:

$$\begin{array}{lrcl} 1) & \alpha + \beta & := & |(\alpha \times \{1\}) \cup (\beta \times \{2\})| \\ 2) & \alpha \cdot \beta & := & |\alpha \times \beta| \end{array}$$

(Die Unterscheidungsindices 1 bzw. 2 in (1) sollen wieder die Mengen (!) α und β disjunkt machen).

Wir haben auch hier die von der Arithmetik von $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{R}$ her üblichen Symbole $+$ und $\cdot$ usw. genommen, die wir bereits bei den ordinalen Rechenoperationen benutzt haben. Wie wir sehen werden, fallen bei unendlichen Argumenten die kardinalen und die ordinalen Operationen weit auseinander (bei ausschließlich endlichen Argumenten stimmen sie allerdings überein, und zwar auch mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation). Meistens tritt an einer Stelle nur eine der beiden Rechnungssorten auf, so daß kaum Mißverständnisse zu befürchten sind. Werden allerdings kardinale Rechnungen mit Argumenten ausgeführt, die mittels der Alephfunktion beschrieben werden, muß man aufpassen, und notfalls unterschiedliche Symbole einführen.

Beide Operationen sind assoziativ und kommutativ, und es gilt das übliche Distributivgesetz. Außerdem gelten die zu erwartenden Monotoniegesetze. Für endliche Kardinalzahlen erhalten wir wieder das übliche Rechnen mit natürlichen Zahlen. Bei unendlichen Kardinalzahlen wird alles sehr einfach. Denn zunächst gilt der

Satz: Für jede unendliche Kardinalzahl α gilt $\alpha^2 = \alpha$.

Der Beweis ist nicht ganz leicht; er benutzt das Auswahlaxiom nicht (denn Kardinalzahlen sind ja wohlgeordnete Mengen!); dagegen ist die Aussage „für jede unendliche Menge A gilt $A \times A$ glm A" sogar zu AC äquivalent. - Aus dem Satz $\alpha^2 = \alpha$ ergibt sich durch Anwendung der Monotoniegesetze der

Satz: Ist wenigstens eine der Kardinalzahlen α, β unendlich, so gelten

$$\alpha + \beta = \alpha \cdot \beta = \max(\alpha, \beta).$$

[83]genauer: die monoton und stetig sind, d.h., bei Limesargumenten λ die Gleichung $f(\lambda) = \sup\{f(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}$ erfüllen.

Hat man einen noch so komplizierten Ausdruck aus endlich vielen Kardinalzahlen und $+$ und $\cdot$, und weiß man, daß auch nur eine der Kardinalzahlen unendlich ist, so suche man als Resultat einfach die größte vorkommende Zahl. (Man sollte auf der Schule vielleicht das Rechnen durch die Arithmetik unendlicher Kardinalzahlen ersetzen; dann hätte doch dort die Mengenlehre einen Effekt!)

Über unendliche Summen und Produkte von Kardinalzahlen will ich hier nicht sprechen, obwohl es hier eine Reihe von nichttrivialen Resultaten schon seit langer Zeit gibt, u.a. eine Formel von Hausdorff; es bestehen auch Verbindungen zur Potenz, die neuerdings sehr wichtig geworden sind und vielleicht auch zur Definition der Potenz genommen werden sollten. Meistens wird die **Potenz** α^β jedoch bequemer definiert als die Kardinalzahl der Menge ${}^\beta\alpha$ der Funktionen von β nach α. Sind α und β beide endlich, ergibt sich die Potenz von natürlichen Zahlen; wenn nur der Exponent endlich ist, können wir den Satz $\alpha^2 = \alpha$ anwenden; ist aber der Exponent unendlich, wissen wir kaum etwas über die Größe von α^β, selbst nicht bei der Basis $\alpha = 2$.

Zunächst einmal ist 2^β die Mächtigkeit der Potenzmenge $\mathfrak{P}(\beta)$. Man zeigt das, indem man die „charakteristischen Funktionen" der Teilmengen von β betrachtet. Cantor hat gezeigt, daß für jede Kardinalzahl β die Potenz 2^β größer ist als β,[84] und er hat vermutet, daß $2^{\aleph_0}$ den kleinstmöglichen Wert, also $\aleph_1$, hat (die sogenannte **Kontinuumhypothese**, auch CH abgekürzt); da $2^{\aleph_0}$ die Mächtigkeit der reellen Zahlen ist, und zwischen $\aleph_0$ und $\aleph_1$ keine Kardinalzahl liegt, kann man das auch so ausdrücken:
Jede unendliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ oder gleichmächtig zu $\mathbb{R}$.

Cantor, und viele Mathematiker nach ihm, haben lange Jahre versucht, die Kontinuumhypothese zu beweisen – ohne Erfolg. Die Schwierigkeit beruht wohl auf folgendem: $2^{\aleph_0}$ ist die Mächtigkeit der Potenzmenge von $\mathbb{N}$; der Übergang von einer unendlichen Menge zu ihrer Potenzmenge ist jedoch so unbestimmt – was gibt es alles für Teilmengen! –, daß es schwierig ist, über die Anzahl der Teilmengen Aussagen zu machen. Noch deutlicher wird das vielleicht bei der **verallgemeinerten Kontinuumhypothese**[85]. Die Potenzmenge einer Menge mit der Kardinalzahl κ hat als Mächtigkeit die unmittelbar auf κ folgende Kardinalzahl; in Formeln, unter Benutzung der $\aleph$-Funktion:

$$\text{Für jede Ordinalzahl } \alpha \text{ gilt} \quad 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}.$$

[84] β ist in $\mathfrak{P}(\beta)$ einbettbar durch die Funktion $(x \mapsto \{x\} \mid x \in \beta)$. Jedoch kann keine Funktion von β nach $\mathfrak{P}(\beta)$ surjektiv sein; sei nämlich, für eine Funktion f, $b := \{x \in \beta \mid x \notin f(x)\}$. Wenn f surjektiv ist, existiert ein $x_o \in \beta$, so daß $b = f(x_o)$. Dann ergibt sich der Widerspruch $x_o \in b$ genau dann wenn $x_o \notin f(x_o) = b$.

[85] abgekürzt GCH (Generalized Continuum Hypothesis).

Im Falle $\alpha = 0$ (d.h. also, bei CH) könnte man auf die Idee kommen: $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ ist doch gleichmächtig zu $\mathbb{R}$, und über $\mathbb{R}$ wissen wir mehr als über beliebige Potenzmengen – vielleicht; aber jedenfalls nicht genug, um über die Kardinalzahl etwas sagen zu können.

Der erste Fortschritt wurde 1939 von Gödel erzielt, der beweisen konnte, daß bei unseren heutigen Kenntnissen der Mathematik die Kontinuumhypothese (sogar GCH) nicht falsch, präziser: nicht widerlegbar, ist. Er zeigte das, indem er die Teilmengenbildung auf die „konstruierbaren" Teilmengen von $\aleph_\alpha$ einschränkte; und von denen gibt es nur „wenige", d.h. nur $\aleph_{\alpha+1}$ Stück. (Damit zugleich wurde übrigens auch die Nichtwiderlegbarkeit des Auswahlaxioms bewiesen).

Erst 1963 gelang es dann P.J. Cohen, mit einer völlig anderen Methode, das Gegenstück zu zeigen: Für sehr viele Kardinalzahlen κ, die sogenannten regulären (siehe unten) läßt sich auch nicht widerlegen (bei unserern derzeitigen Kenntnissen), daß die Potenzmenge sehr viel größere Mächtigkeit hat als die Ausgangsmenge, ja, die Mächtigkeitssprünge können sogar vorgeschrieben werden und verschieden sein, mal groß, mal klein, ganz nach Wunsch, z.B.

$$2^{\aleph_0} = \aleph_2, \quad 2^{\aleph_1} = \aleph_4, \ldots$$

oder

$$2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} = 2^{\aleph_2} = \aleph_3, \quad 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} \quad \text{für} \quad \alpha \geq 3.$$

Etwas mehr kann ich im Abschnitt über Axiomatische Mengenlehre dazu sagen. Zwei Anwendungen der Kontinuumhypothese in der Analysis werden im Anhang beschrieben.

Oben wurde die Unterscheidung in reguläre und in singuläre Kardinalzahlen erwähnt; ganz kurz dazu einige Erläuterungen.
Die Einteilung der Kardinalzahlen allein der Größe nach ist für manche Zwecke nicht ausreichend. Aus der Ordnungstheorie kennt man, seit Hausdorff, den Begriff der **Konfinalität**. Damit ist die minimale Anzahl von Schritten gemeint, die erforderlich ist, um das Ende einer geordneten Menge zu erreichen. z.B. ist ω die Konfinalität von $(\mathbb{R}, <)$ (man schreite alle natürlichen Zahlen durch; auch wenn man größere Schritte macht, z.B. alle Potenzen von 2 durchläuft, man braucht unendlich viele Schritte; man kommt aber andererseits mit abzählbar vielen Schritten aus, obwohl $\mathbb{R}$ selbst überabzählbar ist). Die Konfinalität von $(\omega_1, <)$ ist ω_1; denn da jede (abzählbare) Folge von Ordinalzahlen der zweiten Zahlenklasse ein supremum hat, welches auch noch in der zweiten Zahlklasse liegt, d.h. kleiner als ω_1 ist, kann man ω_1 mit abzählbar vielen Schritten nicht erreichen. – Die Konfinalität ist immer eine Kardinalzahl. Mengen mit einem größten Element haben die Konfinalität 1.

Jede Kardinalzahl κ ist eine Ordinalzahl und deshalb geordnet; folglich ist ihre Konfinalität $\mathrm{cf}(\kappa)$ definiert. κ heißt **regulär**, wenn $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$; sonst heißt κ **singulär**. z.B. ist $\aleph_\omega$ singulär; da man nur die Folge $(\aleph_n \mid n < \omega)$ durchlaufen muß, gilt $\mathrm{cf}(\aleph_\omega) = \omega$. Tieferliegende Sätze der Kardinalzahlarithmetik benutzen alle den Begriff der Konfinalität;

z.B. weiß man seit langem (Satz von Julius König, 1905), daß für unendliche Kardinalzahlen die Ungleichung $\mathrm{cf}(2^\kappa) > \kappa$ gilt. Daraus folgt z.B. daß $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$; denn $\aleph_\omega$ hat die Konfinalität ω.

F. Kombinatorische Mengenlehre.

Ich habe hier bisher gar nicht über Mengenabgebra, d.h. über Durchschnitte und Vereinigungen usw. gesprochen. Der Grund ist, daß diese Dinge ja in vielen Büchern im Einleitungskapitel stehen und ziemlich bekannt sind; oft werden sie mit der Mengenlehre verwechselt - ich hoffe, daß Sie das nach diesem Vortrag nicht mehr tun werden. Allerdings ist die Mengenalgebra mit unendlichstelligen Durchschnitten und Vereinigungen nicht mehr ganz trivial; sie wird in den meisten Büchern auch weggelassen.

Ich möchte aber über ein anderes Gebiet kurz reden, in dem auch in der relativ „ruhigen" Zeit vor den Resultaten Gödels und Cohens durchaus Fortschritte gemacht worden sind, nämlich die **kombinatorische Mengenlehre**, oder auch „unendliche Kombinatorik". Dazu gehören z.B. Sätze wie: Jede unendliche Mengen der Mächtigkeit α läßt sich in α paarweise disjunkte Teilmengen der Mächtigkeit α zerlegen (das folgt aus $\alpha^2 = \alpha$).
In mehr als α disjunkte Teile kann man, der Mächtigkeiten wegen, offenbar keine Zerlegung haben. Für manche Zwecke reicht aber eine Zerlegung in „fast disjunkte" Teilmengen; hier gilt der folgende Satz, den ich sogar beweisen möchte. Zunächst die Definition: Zwei Mengen heißen **fast disjunkt**, wenn ihr Durchschnitt endlich ist.

Satz: Jede abzählbar unendliche Menge läßt sich in $2^{\aleph_0}$ paarweise fast disjunkte abzählbare Mengen zerlegen.

(Beachten Sie bitte, daß $2^{\aleph_0}$ mindestens $\aleph_1$, vielleicht sogar viel größer ist).

Beweis. Statt der gegebenen abzählbar unendlichen Menge zerlegen wir die damit gleichmächtige Menge der ganzzahligen Gitterpunkte in der Ebene. Die $2^{\aleph_0}$ Mengen werden festgelegt durch die Punkte auf der obenen Hälfte des Einheitskreises, so: S sei der Streifen zwischen den beiden Geraden $y = \pm 1$. Wir drehen S um den Winkel α um den Ursprung, $0 \leq \alpha < \pi$; S_α sei die Menge der Gitterpunkte in diesem gedrehten Streifen.

1)	S_α	ist abzählbar unendlich,
2)	$\alpha \neq \beta \Rightarrow S_\alpha \cap S_\beta$	endlich.

QED

Der folgende Satz wurde 1930 von Ramsey zur Behandlung eines Problems aus der Logik benutzt.

Satz von Ramsey:

A sei eine unendliche Menge; M sei die Menge aller ungeordneten Paare (das sind zweielementige Teilmengen) von A; f sei eine beliebige Funktion von M nach $\{1, 2\}$. Dann gibt es eine unendliche Teilmenge H von A, so daß f auf den aus der Menge H gebildeten Paaren konstant ist.

Anschaulicher sind vielleicht die folgenden beiden dazu äquivalenten graphentheoretischen Formulierungen:
Färbt man die Kanten eines unendlichen ungerichteten vollständigen Graphen auf beliebige Weise mit zwei Farben, so gibt es dazu einen unendlichen vollständigen Subgraphen, dessen Kanten alle gleich gefärbt sind, oder auch:
In jedem unendlichen ungerichteten Graphen gibt es eine unendliche unabhängige Eckenmenge (die also alle nicht miteinander verbunden sind), oder einen unendlichen Subgraphen, der vollständig ist (d.h., alle Ecken dieses Subgraphen sind miteinander verbunden).
Ich weiß nicht, von wem die schöne Formulierung stammt: Völliges Chaos ist nicht möglich.
Vom Satz von Ramsey gibt es viele Verallgemeinerungen, unter dem Namen Partitionenkalkül, die einen erheblichen Teil der neueren Mengenlehre ausmachen.

Auch in anderen Teilen der Mengenlehre wird immer stärker der kombinatorische Charakter der Begriffe und Beweise sichtbar.

G. Mengenlehre als Sprache der Mathematik.

Die Mengenlehre hat eine Eigenschaft, welche bei ihrer Erfindung weder vermutet worden, noch beabsichtigt war: sie gestattet es, komplizierte Sachverhalte der Mathematik in einer einheitlichen Sprache auszudrücken. Als ich Student war, wurden Riemannsche Flächen von Ort zu Ort durchaus unterschiedlich definiert, und in jede dieser Definitionen gingen lokale Redeweisen ein. Heute kann man sich dabei viel leichter verständigen (aber es gibt keinen wirklichen Fortschritt: Ein Wiederauftauchen der alten Schwierigkeiten erleben wir zum Beispiel bei den von der Informatik beeinflußten Teilen der Mathematik).

Bei der Erfindung der Mengenlehre ging Cantor durchaus von gewissen vorhandenen mathematischen Gegenständen aus, z.B. Zahlen, geometrischen Gebilden oder anderen. Zwar hat er dann reelle Zahlen als Fundamentalfolgen rationaler Zahlen definiert (zunächst arbeitete er mit Repräsentanten!), aber dadurch wollte er wohl nur eine zum Hantieren mit reellen Zahlen geeignete Definition haben (das ist die Rückführung einer Sorte Urbegriff der Mathematik auf einen anderen).

Nun hat sich herausgestellt, daß man jeden mathematischen Urbegriff auf den Mengenbegriff zurückführen kann, so daß man (theoretisch) die ganze Mathematik als Mengenlehre beschreiben könnte. Es ist sicherlich nicht zweckmäßig, das zu tun, und zur Behandlung der Frage, ob e^{π} transzendent sei, trägt es wenig bei zu wissen, welche Mengen (von

Mengen von Mengen ...) die Zahlen e und π sind; aber bei der Behandlung von Grundlagenfragen der Mathematik, z.B. nach der Gültigkeit des Auswahlaxioms, oder nach der Entscheidbarkeit mancher algebraischer oder analytischer Probleme, ist diese Möglichkeit schon wichtig.

Um das Ganze nicht in vages Gerede ausarten zu lassen, möchte ich einige der Hauptschritte dieser Rückführung skizzieren; viele Einzelschritte werden Sie bereits kennen.

Cantor hatte die reellen Zahlen auf Folgen von rationalen Zahlen zurückgeführt[86]; da man Folgen als Mengen definieren kann, bleiben die rationalen Zahlen. Es ist Ihnen wohl bekannt, wie man diese als Äquivalenzklassen von Brüchen, d.h. geordneten Paaren aus ganzen Zahlen betrachten kann. In ganz ähnlicher Weise reduziert man ganze Zahlen auf natürliche Zahlen.

Geometrie kann man, nach Descartes, auf Arithmetik zurückführen. Algebraische Strukturen sind schon ihrer Definition nach Mengen. Bei topologischen Räumen hat uns zuerst Hausdorff die Reduktion vorgemacht. Bei den Begriffen der Analysis und Funktionalanalysis ist die Reduktionsmethode dann ebenfalls leicht zu sehen, so daß allein übrig bleibt, die natürlichen Zahlen samt ihren Rechenoperationen mengentheoretisch zu begründen.

Natürliche Zahlen als Mengen:

Die Definition ist einfach: Natürliche Zahlen sind endliche Ordinalzahlen. $\mathbb{N}$ wird dann die Ordinalzahl ω. Die Rechenoperationen sind die ordinale Addition, Multiplikation und Potenz (wir hätten auch die kardinalen Verknüpfungen nehmen können, da bei endlichen Argumenten beide übereinstimmen).

Wie schon gesagt, ist es durchaus nicht immer interessant, diese Reduktion mathematischer Begriffe auf Mengen durchzuführen. Kronecker z.B. hielt die natürlichen Zahlen für von Gott gemacht, alles andere für Menschenwerk.

H. Axiomatische Mengenlehre.

Die Definition Cantors, eine Menge sei jede Zusammenfassung von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens, läßt sich so fassen: Gegeben sei eine „klar formulierte“ Eigenschaft $H(x)$, die ein Objekt x haben kann; dann kann man die Menge $\{x \mid H(x)\}$ all der Dinge (und Mengen), welche die Eigenschaft H haben, zusammenfassen. Man nennt diese Art der Mengenbildung **Komprehension nach der Eigenschaft** H, und die Forderung, daß für jede Eigenschaft H die oben angegebene Menge existiere, das (volle) **Komprehensionsschema.** Um Unklarheiten, die sich dabei über die zugelassenen Eigenschaften H bei der Benutzung der Umgangssprachen ergeben könnten (wie z.B. „das Kind kratzte die Katze“) zu vermeiden, kann man sogenannte formalisierte Sprachen benutzen, die eine sehr einfache Grammatik haben; und da, wie

[86] Eine andere Reduktion, die sogar etwas rascher geht, geht auf Dedekind zurück.

wir gesehen haben, die Mengenlehre hinsichtlich der Mathematik sehr ausdrucksstark ist, kann man sich sogar darauf beschränken, allein über Mengen und die Elementbeziehung zu sprechen.

Um 1900 herum wurden Mengenbildungen gefunden, die zu Widersprüchen führten, z.B.

a) Sei $\Omega := \{x \mid x \text{ ist eine Ordinalzahl}\}$.
Die Menge Ω ist, wie jede Menge von Ordinalzahlen, durch die $<$ Relation zwischen Ordinalzahlen wohlgeordnet. Sei γ die Ordinalzahl von $(\Omega, <)$; da γ eine Ordinalzahl ist, gilt $\gamma \in \Omega$, und Ω ist seinem eigenen Abschnitt $(\Omega, <)_\gamma$ ähnlich. Widerspruch zum Satz von Seite 137.

(Antinomie von Burali-Forti, 1897).

b) Weniger Mengenlehre kommt in folgendem Argument vor.
Definition: Eine Menge heißt „normal“, wenn sie sich nicht selbst als Element enthält (es ist gar nicht so leicht, eine nicht-normale Menge zu finden. Vorschlag: Die Menge aller abstrakten Begriffe). Sei nun $A := \{x \mid x \notin x\}$ die Menge aller normalen Mengen.
Frage: Ist A normal?
Wenn ja, d.h. $A \notin A$, so $A \in A$, nach Definition.
Wenn nein, d.h. $A \in A$, so $A \notin A$; Widerspruch.
(Antinomie von Russell, 1903).

Die Antinomien waren zunächst in der Umgangssprache formuliert worden; die „Formalisierung“ der Sprache war hauptsächlich Reaktion auf das Bekanntwerden dieser und anderer Antinomien, konnte aber die beiden oben genannten nicht ausräumen (bei anderen Antinomien ist das gelungen, z.B. durch Trennung der „Objekt-“ von der „Metasprache“).

Um die Antinomien zu vermeiden, muß offenbar das Komprehensionsschema eingeschränkt werden, da die Widersprüche nicht nur Folgen unpräziser Sprechweisen sind. Von den Vorschlägen, wie das vorzunehmen sei, möchte ich die beiden wichtigsten herausgreifen: Die Typentheorie von Bertrand Russell und die von Ernst Zermelo vorgeschlagene Axiomatisierung, die später von Skolem und Fraenkel ergänzt worden ist und heute, als Theorie ZF, fast allgemein verwendet wird.

Russell betrachtete eine Art Mengenlehre über Urelementen (z.B. den reellen Zahlen). Die Urelemente erhalten den Typ 0, Mengen von Urelementen den Typ 1, Mengen von Elementen des Typs 1 den Typ 2, usf.. In jeder Schicht gleichen Typs gilt das volle Komprehensionsschema, die Russellsche Antinomie kann aber nicht auftreten, da der Ausdruck $x \in x$ gar nicht erlaubt ist (in $x \in y$ muß der Typ von y um 1 höher sein als der Typ von x), und die von Burali-Forti nicht, da man zwar die in jeder Schicht von Mengen gleichen Typs enthaltenen Ordinalzahlen zusammenfassen kann, diese Menge aber, so wie ihre Ordinalzahl, in einer höheren Schicht liegen. Obwohl die Typentheorie an die (damals) gewohnte Art der Verwendung der Mengenlehre eng anschließt und recht einleuchtend ist, ist die wirkliche Durchführung von Argumenten häufig beschwerlich und die Tragweite der Theorie ziemlich begrenzt. Heute wird sie kaum noch benutzt.

Zermelo untersuchte, welche Mengenbildungsverfahren bei der Ausführung der verschiedenen Teile der Mengenlehre tatsächlich angewendet werden, und fand, daß sich alle Mengen bildungen aus 6 Grundoperationen zusammensetzen lassen (später stellte sich heraus, daß man noch eine Operation mehr braucht). Diese Grundoperationen waren

$\{x \mid x \in m_0 \text{ und } H(x)\}$,

$\{a, b\}$,

$\mathfrak{P}(a)$,

$\bigcup a$,

die Existenz einer unendlichen Menge,

das Auswahlaxiom.

Als Axiome werden die entsprechenden Existenzaussagen formuliert, z.B.: Für jede Menge a und für jede Menge b existiert eine Menge, welche gerade a und b als Element hat, beziehungsweise: Zu jeder Menge a existiert eine Menge, die gerade die Elemente der Elemente von a enthält (a wird also als Mengensystem betrachtet). Die ersten vier Mengenbildungen sind Spezialfälle des allgemeinen Komprehensionsschemas; dabei sieht das erste Prinzip fast so aus, wie das Komprehensionsschema selbst, allerdings werden nicht ganz beliebige Eigenschaften zugelassen, $\{x \mid H(x)\}$, sondern nur solche mit der Zusatzbedingung $x \in m_0$; d.h., man kann aus jeder Menge m_0 die Menge derjenigen Elemente von m_0, welche die Eigenschaft H haben, aussondern und zu einer Menge zusammenfassen. Man erhält so nur Teilmengen von bereits vorhandenen Mengen, und diese Größenbeschränkung ist der entscheidende Punkt; denn man erhält nicht mehr die Menge <u>aller</u> Ordinalzahlen, sondern nur noch die der Ordinalzahlen aus m_0, und hieraus ergibt sich kein Widerspruch, sondern der Satz:
Zu jeder Menge m_0 von Ordinalzahlen gibt es eine Ordinalzahl, die nicht in m_0 liegt. Das heißt aber gerade: Die Menge aller Ordinalzahlen gibt es gar nicht, On ist keine Menge, sondern nur eine „(eigentliche) Klasse" (Klassen, welche keine Mengen sind, darf man nur rechts vom $\in$-Symbol verwenden; sie drücken nur Eigenschaften aus).

Ganz analog wird aus der Russellschen Antinomie der Satz:

> Zu jeder Menge m_0 gibt es eine Menge a, die nicht Element von m_0 ist (nämlich $a = \{x \mid x \in m_0, x \notin x\}$); anders gesagt: *Es gibt keine Allmenge.*

Beweis. $a := \{x \mid x \in m_0 \text{ und } x \notin x\}$. Ist $a \in a$? Wenn ja, so $a \in m_0$ und $a \notin a$; Widerspruch. Wenn nein, so $a \notin m_0$ oder $a \in a$. Kein Widerspruch, sondern $a \notin m_0$!

Es gibt allerdings Mengenbildungen, welche sich nicht durch Aussonderungen erreichen lassen; deshalb die Axiome der (ungeordneten) Paarmenge, der Potenz- und der Vereinigungsmenge. Das Unendlichkeitsaxiom sichert die Existenz unendlicher Mengen, insbesondere die von $\mathbb{N}$. Über das Auswahlaxiom habe ich vorhin schon berichtet.

Eine der Grundforderungen über Mengen ist: Die Mengen A und B sind gleich, wenn sie dieselben Elemente haben. Dies wird im **Extensionalitätsaxiom** gefordert, das zu den eigentlichen Mengenbildungsaxiomen noch hinzukommt (besser vielleicht: ihm vorausgeht). Je nachdem, ob man es nur für Mengen oder für alle Dinge fordert, kann man die Existenz von „Urelementen" (die keine Mengen sind, über denen man aber Mengenlehre betreibt, z.B. die reellen Zahlen) zulassen oder ausschließen. Der im vorigen Abschnitt erweiterten Reduktionsmöglichkeit aller mathematischen Begriffe auf den Mengenbegriff halber schließt man Urelemente bei axiomatischen Untersuchungen meist aus; denn sonst müßte man z.B. Widerspruchsfreiheitsbeweise usw. immer auf die Widerspruchsfreiheit der (Theorie der) Gesamtheit der Urelemente relativieren.

Es hat sich herausgestellt, daß man, um das ganze, von Cantor entworfene Gebäude zu errichten, noch ein weiteres Axiom braucht, das Ersetzungsaxiom; und zwar zunächst, um Mengen von der Kardinalzahl $\aleph_\omega$ bilden zu können. Durch das Unendlichkeitsaxiom erhält man eine abzählbare Menge a_0, durch Potenzmengenbildung gelangt man zu einer Menge a_1 der Mächtigkeit (mindestens) $\aleph_1$, dann zu a_2 mit $|a_2| \geq \aleph_2$, usw. Um $\aleph_\omega$ zu erhalten, braucht man nun die Vereinigung $a_0 \cup a_1 \cup a_2 \cup \ldots$ aller dieser Mengen, und wegen des Vereinigungsaxioms würde es reichen, die Menge $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$ zu haben. Diese läßt sich aber, wie man beweisen kann, aus den bisherigen Axiomen nicht gewinnen. Die Ersetzungsaxiome sagen nun, daß ich z.B. in der Menge $\{0, 1, 2, \ldots\}$ die Elemente durch die oben zugeordneten Mengen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ersetzen, und so eine Menge erhalten kann. – Auch, um die v. Neumannschen Ordinalzahlen zu bilden, muß ich angemessene Ersetzungsprozesse vornehmen können.

Das Ersetzungsaxiom ist ein Axiomenschema; zu jedem Zuordnungsprozeß gibt es ein damit formuliertes Axiom. Ebenso ist auch „das" Aussonderungsaxiom eine Zusammenfassung von unendlich vielen Axiomen: Zu jeder aussondernden Eigenschaft H gibt es ein entsprechendes Axiom.

Die Ersetzungsaxiome gehen auf A.A. Fraenkel zurück; das gesamte Axiomensystem nennt man ZF bzw. ZFC (ohne bzw. mit dem Auswahlaxiom AC). Meistens wird noch ein weiteres Axiom, das Fundierungsaxiom hinzugenommen; man erklärt es folgendermaßen: Die „v. Neumannsche Hierarchie" ist der Mengenturm, den man durch Iteration der Potenzmengenbildung, ausgehend von der leeren Menge, erhält. Genauer: Durch Rekursion über die Klasse On aller Ordinalzahlen definiert man

$$V_0 := \emptyset, \quad V_{\alpha+1} := \mathfrak{P}(V_\alpha), \quad V_\lambda := \bigcup_{\beta<\lambda} V_\beta \quad \text{für Limeszahlen } \lambda,$$

und schließlich definiert man die Klasse aller v. Neumannschen Mengen V_∞ durch

$$V_\infty := \bigcup_{\alpha\in\mathrm{On}} V_\alpha.$$

Dann besagt das Fundierungsaxiom gerade: Jede Menge liegt in V_∞, d.h., die Allklasse V ist gleich V_∞, kurz $V = V_\infty$.
(Die ursprüngliche Formulierung des Axioms ist mehr technischer Natur; sie verbietet die Existenz unendlich langer absteigender $\in$-Ketten, analog zur ensprechenden Eigenschaft bei Wohlordnungen. Das ist äquivalent zur oben gegebenen Formulierung.)

Innerhalb der v. Neumannschen Hierarchie, bei Gültigkeit des Fundierungsaxioms also für alle Mengen, kann man eine Rangfunktion einführen. Man nennt den Rang der Menge x die kleinste Ordinalzahl α, so daß $x \in V_{\alpha+1}$. Gilt $y \in x$ und hat x einen Rang, so hat auch y einen Rang, und der Rang von y ist kleiner als der Rang von x. Deßhalb kann man Beweise und Definitionen durch Rekursion über den Rang der Mengen führen.
Der Rang einer Ordinalzahl α ist α (bei Verwendung der üblichen Definition des Ranges). Ohne Ersetzungsaxiome erhält man nicht einmal die Ordinalzahl $\omega + \omega$ (ordinale Addition), sondern nur die Zahlen $\omega + n$, für jedes n aus ω.

Das Fundierungsaxiom führt so zu einer gewissen Übersichtlichkeit des mengentheoretischen Universums, und es ist manchmal bequem; wirklich gebraucht wird es aber zur Herleitung von Sätzen nicht. In jüngster Zeit wird es von Informatikern angezweifelt, welche wünschen, daß z.B. Programme auf sich selbst Bezug nehmen können, und daß deshalb sogar die Unfundiertheit der $\in$-Relation zugelassen werden sollte (obwohl man selbstverständlich auch in einer Mengenlehre mit Fundierungsaxiom unfundierte Relationen haben kann, z.B. die Kleiner-Relation auf den ganzen Zahlen).

Benutzt man zur Formulierung der Mengenlehre die formalisierte Sprache des Prädikatenkalküls, so kann man die Resultate der Mathematischen Logik anwenden. Dazu gehört erstens eine genaue Definition der Ableitbarkeit aus gegebenen Axiomen und damit auch der Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems, zum anderen den Nachweis, daß diese formale Ableitbarkeit mit dem inhaltlichen Folgern zusammenfällt, d.h., daß jedes widerspruchsfreie Axiomensystem ein Modell hat (Vollständigkeitssatz von Gödel). Andererseits sagt der Unvollständigkeitssatz von Gödel, daß in jedem genügend starken Axiomensystem (d.h., in welchem sich die gewöhnliche Arithmetik von $\mathbb{N}$ beschreiben läßt) sich die eigene Widerspruchsfreiheit nicht beweisen läßt; insbesondere also läßt sich nicht ein Modell des gegebenen Axiomensystems in dem System selbst konstruieren. Dies entspricht der Erfahrung mit Versuchen, Modelle der Mengenlehre zu konstruieren (z.B. ist $(V_\omega, \in)$

ein Modell von ZF* := (ZF ohne Unendlichkeitsaxiom)); aber man braucht zur Konstruktion von V_ω die Zahl ω, und damit das Unendlichkeitsaxiom; kann diese Konstruktion also nicht in ZF* durchführen.

Nun kann man in der Mengenlehre, d.h. in ZF oder in ZFC, die ganze (bisher bekannte) Mathematik formulieren; dann folgt aber aus dem Unvollständigkeitssatz, daß es in der (bisher bekannten) Mathematik nicht gelingen kann, einen Widerspruchsfreiheitsbeweis für die Mengenlehre zu führen (man vgl. dazu auch den Vortrag von Herrn van Dalen über den Grundlagenstreit). Die Widerspruchsfreiheitsbeweise der Mengenlehre sind alle relative Widerspruchsfreiheitsbeweise, der Art, daß sie sagen: Wenn ein System A widerspruchsfrei ist, so auch ein System B. In der Mengenlehre hat das fast immer die Form: Wenn ZF widerspruchsfrei ist, so auch ZFC, oder ZFC + GCH, oder (ZF + eine andere mengentheoretische Aussage). Inhaltlich kann man sich das ganz gut so vorstellen, daß man, ausgehend von einem Modell von ZF, ein Modell der stärkeren Theorie (ZF + ...) konstruiert.
Dabei sind drei Grundkonstruktionen bekannt:

1) Die auf Fraenkel zurückgehende Methode der Permutationsmodelle.

   Damit bewies (1922) Fraenkel die Verträglichkeit der Negation des Auswahlaxioms mit ZF#; d.h. er zeigte: Wenn ZF# widerspruchsfrei ist, so auch (ZF# + non AC). (Dabei ist ZF# eine Form von ZF, in der Urelemente zugelassen sind, in der das Extensionalitätsaxiom also modifiziert werden muß. Das neue Modell wurde mit Hilfe von Permutationen dieser Urelemente konstruiert).

2) Die von Gödel erfundene Methode der „Inneren Modelle“.

   Damit konnte er (1938) die Verträglichkeit von AC und von GCH mit ZF beweisen.

3) Die 1963 von Cohen erfundene Erzwingungsmethode („Forcing“), mit der es ihm gelang, die Verträglichkeit der Negation von CH (und sehr vieler anderer Aussagen) mit ZF zu beweisen.

Die Methoden von Fraenkel und Cohen sind zu kompliziert, um sie hier anzudeuten. Dagegen läßt sich die Methode von Gödel leichter beschreiben (die Beweisführung ist dann komplizierter).

Beginnen wir mit der v. Neumannschen Hierarchie. Beim Übergang von V_α zu $V_{\alpha+1}$ setzt man dort $V_{\alpha+1} := \mathfrak{P}(V_\alpha)$. Wegen der Ungewißheit über die Größe der Potenzmenge läßt das keine Rückschlüsse auf die Mächtigkeit von $V_{\alpha+1}$ zu. Anders ist das, wenn man den Übergang etwas vorsichtiger vornimmt und nicht alle Teilmengen, sondern nur gewisse Teilmengen zuläßt, von denen man weiß, daß sie vorhanden sein müssen, da man sie definieren kann (in der Struktur $(V_\alpha, \in)$, mit Parametern aus V_α); so erhält man eine kleinere Hierarchie $(L_\alpha \mid \alpha \in On)$, wobei $L_\alpha \subset V_\alpha$.

Man setzt wieder

$$L_0 := \emptyset, \quad L_{\alpha+1} := \text{Defb}(L_\alpha, \in), \quad L_\lambda := \bigcup_{\beta<\lambda} L_\beta \quad \text{für Limeszahlen } \lambda,$$

und schließlich

$$L := \bigcup_{\alpha \in \text{On}} L_\alpha.$$

Dann gilt trivialerweise $L_\alpha \subset V_\alpha$ für jede Ordinalzahl α; also $L \subset V_\infty$. Es läßt sich zeigen, daß L ein ZF-Modell ist (wenn V_∞ eines war), in dem das Auswahlaxiom (sogar in einer sehr starken Form) gilt. Der Beweis der Gültigkeit der Kontinuumhypothese (sogar von GCH) benutzt dann auf raffinierte Art zwei Sätze der Logik, nämlich den Isomorphisatz von Mostowski und den Satz von Löwenheim-Skolem.

Die Mengen aus L nennt man „konstruierbar", L selbst ein **inneres Modell**, und die Aussage „$V = L$" das **Konstruierbarkeitsaxiom**; es besagt: Jede Menge ist konstruierbar.

Der Beweis liefert auch die Verträglichkeit dieses Axioms mit ZF; im Modell L gilt nämlich die Aussage „Jede Menge ist konstruierbar", d.h. das Konstruierbarkeitsaxiom.

Der Beweis, daß auch die Negation der Kontinuumhypothese mit ZFC verträglich ist, muß dann auf grundsätzlich andere Art gezeigt werden. Das gelang 1963 P.J. Cohen. 1970 konnte Easton, durch Verfeinerung der Cohenschen Methode, zeigen, daß man den Verlauf der Funktion $(\kappa \to 2^\kappa \mid \kappa$ eine Kardinalzahl) für die regulären Argumente κ ziemlich willkürlich vorschreiben kann (wie auf Seite 150 angegeben).
Zunächst schien es so, daß diese Willkür auch bei Potenzen mit singulärem[87] Exponenten möglich ist. Überraschenderweise stellte sich heraus, daß bei singulären Kardinalzahlen κ, deren Konfinalität größer als $\aleph_0$ ist, das Verhalten der Exponentialfunktion bei Argumenten unterhalb κ ihr Verhalten bei κ stark beeinflußt: gilt z.B. unterhalb κ die verallgemeinerte Kontinuumhypothese, $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ für $\aleph_\alpha < \kappa$ so gilt sie auch bei κ das heißt $2^\kappa = \kappa^+$.

Bei singulären Kardinalzahlen mit der Konfinalität $\aleph_0$ schien diese Bindung nicht vorhanden. Wie neuere Arbeiten von Shelah zeigen, gibt es sie auch dort, wenn auch schwächer; ein sonderbares Resultat ist

Satz (Shelah): Wenn für jedes $n \in \mathbb{N} \quad 2^{\aleph_n} < \aleph_\omega$, **so** $2^{\aleph_\omega} < \aleph_{\omega_4}$.

Man weiß nicht, ob die Schranke $\aleph_{\omega_4}$ scharf ist; mit Sicherheit kann man den Index ω_4 in der Behauptung nicht unter ω_1 drücken (entsprechende Unabhängigkeitsresultate sind bekannt).
Dies ist nur ein Beispiel von vielen neuen, in ZFC **beweisbaren**, Sätzen.

[87]Eine Kardinalzahl κ heißt singulär, wenn ihre Konfinalität $\text{cf}(\kappa)$ kleiner ist als κ. Vgl. Seite 150.

Einige Schlußbemerkungen.

Auf viele Fragen habe ich Ihnen hier keine Antwort gegeben. Z.B.: Wie steht es denn nun mit der Kontinuumhypothese in der „wirklichen Welt" ?

Ich glaube, so lange wir über diese wirkliche Welt nicht mehr wissen als heute, können wir dazu nichts sagen. Aber mir erscheint es zweifelhaft, ob es diese „wirkliche Welt der Mathematik" überhaupt gibt. Wenn nicht, ist es vielleicht eine Frage der Zweckmäßigkeit, welche Version z.B. der Kontinuumhypothese man verwenden will. Bei der überaus großen Zahl der heute bekannten mit dem System ZF konsistenten Verzweigungsmöglichkeiten ist diese Situation allerdings sehr unbefriedigend. Vielleicht werden in den nächsten Jahrhunderten inhaltliche mathematische und außermathematische Einsichten gewonnen werden, die eine Entscheidung für eine der Möglichkeiten herbeiführen.

Im Mittelalter wurde viel und scharfsinnig über das Geschlecht der Engel nachgedacht; ich glaube nicht, daß die moderne Mengenlehre einst das Schicksal solcher Überlegungen teilen muß; die kombinatorischen Beziehungen, die ihren Ausdruck in der Mengenlehre finden, werden auch in Zukunft ihre Nützlichkeit bei der Beschreibung unserer Welt zeigen.

Anhang: Anwendungen der Kontinuumhypothese.

Mit der Kontinuumhypothese kann man Sätze beweisen, die ohne sie nicht oder nur schwerer zu beweisen sind (für zahlreiche Sätze, welche ursprünglich mit der Kontinuumhypothese bewiesen worden waren, hat man später CH-freie Beweise gefunden). Ich möchte zwei Beispiele der Anwendungsmöglichkeiten von CH geben.

1. Beispiel:
Unter CH gilt: Die Vereinigung von weniger als $2^{\aleph_0}$ (Lebesgueschen) Nullmengen ist eine Nullmenge.
Beweis. Das Lebesguesche Maß ist σ-additiv; insbesondere ist die Vereinigung von abzählbar vielen Nullmengen eine Nullmenge.

2. Beispiel:
Unter CH gilt der folgende Satz (**Luzin 1914**):
Es gibt eine Teilmenge M von $\mathbb{R}$ der Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$, die jede magere Teilmenge von $\mathbb{R}$ in höchstens abzählbar vielen Punkten schneidet.
Bekanntlich nennt man eine Teilmenge A von $\mathbb{R}$ **nirgends dicht**, wenn die abgeschlossene Hülle $\overline{A}$ von A kein Intervall umfaßt; Mengen, die Vereinigung von höchstens abzählbar vielen nirgends dichten Mengen sind, heißen **mager**. Magere Mengen sind, nach topologischen Gesichtspunkten, kleine Teilmengen von $\mathbb{R}$. Jede Teilmenge einer nirgends dichten Menge ist nirgends dicht; die abgeschlossene Hülle einer nirgends dichten Menge ist nirgends dicht.

Der **Satz von Baire** sagt dann: Kein Intervall ist mager; insbesondere ist $\mathbb{R}$ selbst nicht mager.

In dem folgenden Beweis wird die Kontinuumhypothese benutzt, um eine Menge der Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$ durch die Ordinalzahlen der zweiten Zahlklasse durchzunumerieren und dann auszunutzen, daß jede Zahl dieser Zahlklasse nur abzählbar viele Vorgänger hat.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß für jede nirgends dichte Teilmenge A von $\mathbb{R}$ gilt $|M \cap A| \leq \aleph_0$. Sei $\mathcal{B}$ die Menge aller abgeschlossenen, nirgends dichten Teilmengen von $\mathbb{R}$. Da es nur $2^{\aleph_0}$ abgeschlossene Teilmengen von $\mathbb{R}$ gibt, hat $\mathcal{B}$ die Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$.
Sei $\mathcal{B} = (B_\alpha \,|\, \alpha < \omega_1)$ eine Aufzählung von $\mathcal{B}$ ohne Wiederholung (existiert wegen CH). Wir setzen, für $\alpha < \omega_1$. $D_\alpha := B_\alpha \setminus \bigcup(B_\beta \,|\, \beta < \alpha)$. Jede einelementige Teilmenge $\{x\}$, x aus $\mathbb{R}$, ist nirgends dicht und abgeschlossen, deshalb gilt

$$\mathbb{R} = \bigcup_{\alpha \in \omega_1} B_\alpha .$$

Dann gilt ebenfalls

$$\mathbb{R} = \bigcup_{\alpha \in \omega_1} D_\alpha .$$

Die D_α, $\alpha < \omega_1$, sind paarweise disjunkte nirgends dichte Mengen; möglicherweise sind aber viele der D_α leer. Jedoch sind $\omega_1 (= 2^{\aleph_0})$ der D_α nicht-leer; denn wären nur abzählbar viele nicht leer, so existierte ein $\beta < \omega_1$, so daß für jedes $\alpha \geq \beta$ gälte $D_\alpha = \emptyset$. Dann würde aber

$$\mathbb{R} = \bigcup_{\alpha < \beta} D_\alpha$$

die Vereinigung von abzählbar vielen nirgends dichten Mengen sein, im Widerspruch zum Satz von Baire. Sei M eine Auswahlmenge aus der Familie der nichtleeren D_α, $\alpha < \omega_1$. M hat die Mächtigkeit ω_1.
Sei jetzt A eine beliebige nirgends dichte Menge. Da $\overline{A}$ ebenfalls nirgends dicht ist, gibt es einen Index α_0 mit $\overline{A} = B_{\alpha_0}$. Für jedes $\beta > \alpha_0$ gilt dann $D_\beta \cap \overline{A} = \emptyset$; das heist, diese D_β tragen zu $M \cap \overline{A}$ nichts bei. Da es nur abzählbar viele $\alpha \leq \alpha_0$ gibt, und jedes derartige α höchstens ein Element zu M beiträgt, ist $M \cap \overline{A}$, und erst recht $M \cap A$, höchstens abzählbar.

Literaturhinweise.

Die Ausgabe der mathematischen und philosophischen Schriften Cantors ist heute wieder erhältlich:

Georg Cantor,
Gesammelte Abhandlungen,
Springer Verlag, 1932 und 1980.

Das Buch

Felix Hausdorff,
Grundzüge der Mengenlehre,
Veit und Comp., Leipzig 1914.

erschien in stark veränderter Form unter dem Titel

Mengenlehre,
de Gruyter 1927.

und abermals (etwas erweitert) 1935. Alle drei Ausgaben sind als Nachdrucke oder übersetzt nach 1945 bei Chelsea oder bei Dover erschienen. Vielleicht sind sie dort sogar jetzt noch erhältlich.

Zu den klassischen Werken über Mengenlehre in deutscher Sprache gehören auch:

A.A. Fraenkel,
Einleitung in die Mengenlehre,
Springer, Berlin, 1919, 3. Auflage 1928.

A.A. Fraenkel,
Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre,
Leipzig und Berlin, 1927, Nachdruck bei Teubner, Stuttgart, 1972.

E. Kamke,
Mengenlehre,
Sammlung Göschen 999/999a

H. Bachmann,
Transfinite Zahlen,
Springer, Berlin, 1955 und 1967.

In englicher Sprache:

A.A. Fraenkel,
Abstract Set Theory,
North Holland Publ. Company, 1953 und 1961.

Fraenkel/Bar-Hillel/(Levy),
Foundations of Set Theory,
North Holland Publ. Company, 1958 (1973).

Kuratowski/Mostowski,
Set Theory,
PWN Warschau und North Holland, 1968.

Die moderne Literatur ist vorwiegend in Englisch erschienen. Aus der großen Zahl der Titel seien empfohlen

Thomas Jech,
Set Theory,
Academic Press, 1978.
Sehr umfangreich (621 Seiten!), komprimiert geschrieben.

A. Levy,
Basic Set Theory,
Springer, 1979.
Breiter geschrieben als das Buch von Jech.

und als Einführung

K. Devlin,
Fundamentals of Contemporary Set Theory,
Springer, 1979.
Neuauflage 1993: The Joy of Sets.

Außerdem die beiden kurzen Einführungen in deutscher Sprache:

H.D. Ebbingshaus,
Einführung in die Mengenlehre,
Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1977.

Friedrichsdorf/Prestel,
Mengenlehre für den Mathematiker,
Vieweg, 1985.

Über Teilgebiete der Mengenlehre seien empfohlen:

Descriptive Mengenlehre

Y. N. Moschovakis,
Descriptive Set Theory,
North Holland Publ. Company, 1980.

Kombinatorische Mengenlehre

Erdös/Hajnal/Maté/Radó,
Combinatorial Set Theory,
North Holland Publ. Company, 1984.

Auswahlaxiom

Th. J. Jech,
The Axiom of Choice,
North Holland Publ. Company, 1973.

Grundlagen der Mengenlehre

Fraenkel/Bar-Hillel/Levy,
Foundations of Set Theory,
North Holland Publ. Company, 1973.

Unabhängigkeitsbeweise

Kenneth Kunen,
Set Theory. An introduction to independence proofs,
North Holland Publ. Company, 1980.

Große Kardinalzahlen

Frank.R. Drake,
Set Theory, An introduction to large cardinals,
North Holland and Publ. Company, 1974.