Vorlesungen zum Gedenken an Felix Hausdorff
E. Eichhorn, E. J. Thiele (Hrsg.)
©Heldermann Verlag Berlin 1994
107–130

Zur Situation der Analysis um die Jahrhundertwende

Michael von Renteln, Karlsruhe

1 Einleitung

Um die Wende vom 19. zum 20. Jahrhundert bestanden die beiden mathematischen Zentren Paris und Göttingen.
Kurz nach 1900 kamen an beiden Orten zwei neue mathematische Strömungen empor, die auf die weitere Entwicklung der Analysis von größtem Einfluß sein sollten. Sie sind besonders mit den folgenden beiden Namen verknüpft:
In Paris: mit H. Lebesgue. Seine fundamentalen Arbeiten dazu waren:

1902 Intégrale, Longueur, Aire (Thèse,[10]);
1904 Leçons sur l'intégration ... ([11]);
1906 Leçons sur les séries trigonométriques ([12]).

In Göttingen: mit D. Hilbert. Seine fundamentalen Arbeiten dazu waren:

1904 Allgemeine Theorie der Integralgleichungen (siehe [9], S. 1–38);
1906 Theorie der Funktionen von unendlich vielen Variablen (siehe [9], S. 109–174);
1906 Neue Begründung und Erweiterung der Theorie der Integralgleichungen (siehe [9], S. 174–212).

Diese beiden Strömungen waren ihrerseits das Ergebnis eines längeren Entwicklungsprozesses, den wir in den Hauptpunkten skizzieren wollen, damit die Situation der Analysis um die Jahrhundertwende besser verständlich wird.
Die beiden erwähnten Entwicklungen liefen an diesen verschiedenen Orten zeitgleich nebeneinander her und schienen sonst keine Gemeinsamkeiten zu haben.
Daß dies jedoch in Wirklichkeit nicht der Fall war, sondern daß es im Gegenteil eine ganz tiefliegende und natürliche Verbindung gab, war eine sensationelle Entdeckung von Friedrich Riesz.
Bevor wir dazu kommen, beginnen wir mit einem historischen Rückblick, und zwar einerseits bezüglich Paris mit Fourierreihen und Integration und andererseits bezüglich Göttingen mit Integralgleichungen.

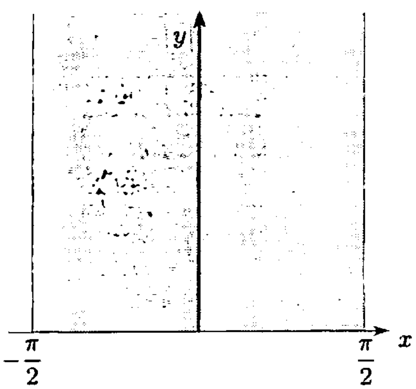
2 Fouriers Weg von Problemen der Wärmeausbreitung zu den Fourierreihen

Joseph Fourier veröffentlichte nach mehreren vorbereitenden Schriften im Jahre 1822 sein epochemachendes Werk *Théorie Analytique de la Chaleur* (Analytische Theorie der Wärme [6]).

Dieses Buch galt als die Bibel der mathematischen Physiker des 19. Jahrhunderts. Ausgangspunkt für Fourier sind Randwertprobleme der mathematischen Physik, genauer gesagt handelt es sich dabei um Randwertprobleme bei Partiellen Differentialgleichungen der Wärmeausbreitung in festen Körpern.

Ausgangspunkt: Fourier geht von folgendem (ebenen) Randwertproblem aus (Art. 165 ff.)

Gegeben ist als zugrundeliegendes Gebiet G ein unendlich langes Rechteck (Metallplatte)



$$G := \left\{(x,y) : -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},\ y > 0\right\}.$$

Es sei $v(x,y,t)$ die Temperatur der Metallplatte im Punkt (x,y) zur Zeit t. Die Funktion v befolgt die Partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = k^2 \frac{\partial v}{\partial t},$$

wobei k eine gewisse physikalische Konstante ist. Fourier untersucht den stationären Fall (Art. 166), d.h. die Temperaturverteilung ist unabhängig von der Zeit, d.h. $\frac{dv}{dt} = 0$. Das ergibt als Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \tag{1}$$

Dies ist die (ebene) Potentialgleichung. Fourier betrachtet dazu die folgenden drei Randbedingungen, die er auch physikalisch motiviert.

$$v\left(-\frac{\pi}{2}, y\right) \equiv v\left(+\frac{\pi}{2}, y\right) \equiv 0 \quad \text{für alle } y > 0, \tag{2}$$

d.h. die Metallplatte soll an den vertikalen Randstreifen auf der konstanten Temperatur Null gehalten werden.

$$v(x,0) \equiv 1 \quad \text{für } -\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}, \tag{3}$$

d.h. die Metallplatte soll am unteren Randstreifen auf der konstanten Temperatur 1 gehalten werden.

(4) $$\lim_{y\to\infty} v(x,y) = 0 \quad \text{für alle } x \text{ mit } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

(Abkühlungsbedingung).
Man beachte, daß wir Fouriers Bezeichnungen für die x- und y-Achse gerade vertauscht haben, wie heute allgemein üblich.
Fourier entwickelt nun den Plan für die Auflösung dieser Aufgabe. Er sagt (Art. 167), daß man zunächst nach der einfachsten Funktion suchen muß, die die Differentialgleichung (1) erfüllt. Sodann muß man die Lösung verallgemeinern, so daß sie noch den Randbedingungen (2), (3), (4) genügt. Dieses Vorhaben führt er nun aus.
Für das Auffinden einer speziellen Lösung der Differentialgleichung (1) wählt er den Produktansatz

$$v(x,y) = f(x)\,F(y)$$

und leitet je zweimal partiell nach x und y unter Beachtung der Produktregel ab und erhält in (1) eingesetzt und durch $f(x)F(y)$ dividiert die Gleichung

$$\frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{F''(y)}{F(y)} = 0\,.$$

Er setzt nun $\dfrac{F''(y)}{F(y)} = +m^2$ und $\dfrac{f''(x)}{f(x)} = -m^2$ (bei Fourier steht nur m), wobei m^2 eine positive konstante Größe ist.
Die Lösungen dieser linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen sind bekanntlich

$$F(y) = e^{my} \quad \text{und} \quad F(y) = e^{-my}$$

bzw.

$$f(x) = \sin mx \quad \text{und} \quad f(x) = \cos mx \qquad (m \in \mathbb{N}).$$

Er bemerkt, daß die Lösung $F(y) = e^{my}$ wegen der Abkühlungsbedingung (4) nicht in Frage kommt. Aus der Randbedingung (2) folgt, daß $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(+\frac{\pi}{2}\right) = 0$ sein muß. Daher kommen die Funktionen $f(x) = \sin mx$ $(m = 2,4,6,\ldots)$ oder die Funktionen $f(x) = \cos mx$ $(m = 1,3,5,\ldots)$ als Lösungen in Frage. Fourier wählt die letzteren. Damit erhält er

$$v(x,y) = e^{-my}\cos mx \qquad (m = 1,3,5,\ldots)$$

als Lösung der Differentialgleichung (1), welche die Randbedingungen (2) und (4) erfüllt. Um nun auch noch die Randbedingung (3) erfüllen zu können, setzt Fourier die Einzellösungen in Form einer unendlichen Reihe mit gewissen Koeffizienten a_m zusammen, d.h. er betrachtet (Art. 169) die Funktion

$$v(x,y) = \sum_{m\neq 2\mathbb{N}} a_m e^{-my}\cos mx\,.$$

Die Erfüllung der Randbedingung (3) erfordert nun, daß die Gleichung

$$1 \equiv v(x,0) = \sum_{m \neq 2\mathbf{N}} a_m \cos mx = a_1 \cos x + a_3 \cos 3x + a_5 \cos 5x + \dots$$

für alle x zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ erfüllt ist.
Fourier sagt, daß man überhaupt zweifeln könne, ob die Koeffizienten a_m so bestimmt werden können, daß obige Gleichung gilt. Er verspricht aber, diese Frage vollständig zu klären.
Es stellt sich also das Problem, die konstante Funktion 1 im Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ in eine trigonometrische Reihe obiger spezieller Form zu entwickeln. Später (Art. 207 ff) betrachtet er das allgemeinere Problem, eine beliebige reellwertige Funktion f im Intervall $[0, \pi)$ in eine trigonometrische Reihe der Form

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$$

zu entwickeln. Fourier behauptet, daß dies möglich ist für beliebige, auch unstetige Funktionen f, und daß man als Koeffizienten erhält

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \qquad (n = 1, 2, 3, \dots) .$$

Hier sind nun zwei Probleme ineinander verwoben. Um diese zu trennen, müssen wir zwischen trigonometrischen Reihen und Fourierreihen unterscheiden. Dazu definieren wir die betreffenden Reihen gleich wie im Anschluß an Fourier allgemein üblich.
Definition: Eine (reelle) trigonometrische Reihe ist eine Reihe der Form

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) ,$$

wobei x eine reelle Variable und die Koeffizienten a_n und b_n reelle Zahlen sind. Eine (reelle) Fourierreihe (zu einer Funktion f) ist eine spezielle trigonometrische Reihe derart, daß für die Koeffizienten gilt:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx , \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx . \end{aligned}$$

Bemerkung: Da die Funktionen $\sin nx$ und $\cos nx$ die Periode 2π besitzen, genügt es, die trigonometrischen Reihen in einem Intervall der Länge 2π zu betrachten. Man nimmt meist das Intervall $[-\pi, +\pi)$ oder $[0, 2\pi)$.
Fourier hat also behauptet, daß man jede beliebige, auch unstetige, im Intervall $[0, 2\pi)$ gegebene, reellwertige Funktion f in eine Fourierreihe entwickeln könne. Wie seine Ausführungen erkennen lassen, besagt dies für Fourier, daß die Fourierreihe in jedem

Punkt x des Intervalles konvergiert, und zwar entweder gegen $f(x)$, falls x ein Stetigkeitspunkt von f ist, oder gegen das arithmetische Mittel $\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$ von links- und rechtsseitigem Grenzwert, falls x eine Sprungstelle von f ist. An andere Unstetigkeiten dachte er offensichtlich nicht. Für ihn war es auch eine Selbstverständlichkeit, daß jede im Intervall $[0, 2\pi)$ gegebene Funktion dort integrierbar ist und damit die Formeln für die Fourierkoeffizienten einen Sinn erhalten (Art. 229). Dies traf wohl auch auf alle, selbst die unstetigsten Funktionen zu, an die Fourier dachte.

Das Bedürfnis, den Begriff des bestimmten Integrals zu definieren, hatte erst Cauchy, als er es in seinem Buch *Leçons sur le calcul infinitésimal* (Paris, 1823) unternahm, den Aufbau der Analysis streng zu begründen. Cauchy definierte das bestimmte Integral für (stückweise) stetige Funktionen. Eine solche Funktion kann per definitionem höchstens endlich viele Unstetigkeiten haben. Viel weiter ging Riemann, der in seiner Habilitationsschrift einen Integralbegriff schuf, der weit über den Cauchyschen hinausging und sogar gewisse Funktionen mit unendlich vielen Unstetigkeiten zu integrieren gestattete.

3 Das Riemann–Integral als Fundament zur Behandlung von Fourierreihen

Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe war der Titel der Riemannschen Habilitationsschrift von 1854, die erst 1867 postum von Dedekind im 13. Bande der *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften* zu Göttingen veröffentlicht wurde und 1876 in Riemanns *Gesammelten Werken* größere Verbreitung fand (siehe [15], S. 227–271).

Riemann erkannte, daß die Theorie der Fourierreihen nur dann auf eine sichere Grundlage gestellt werden konnte, wenn klar war, was man unter einem bestimmten Integral zu verstehen hatte. Um dies zu tun, definierte er das Riemann–Integral.

Der Riemannsche Integralbegriff hat sich bis heute durchgesetzt und seine Leistungsfähigkeit in der Praxis bewiesen. Er ist dem Cauchyschen Integral weit überlegen, wie das folgende aus der Analysis wohlbekannte Beispiel zeigt. Sei $\{r_k\}$ eine Abzählung der rationalen Zahlen im offenen Intervall $(0, 1)$. Wir definieren die Funktion

$$f(x) := \sum_{r_n < x} \frac{1}{2^n}$$

mit der Vereinbarung $f(0) = 0$. Diese Funktion ist wohldefiniert im Intervall $[0, 1]$, insbesondere ist $f(1) = 1$, aber sie ist unstetig in jedem rationalen Punkt, insbesondere liegen ihre Unstetigkeitsstellen im Intervall $[0, 1]$ überall dicht.

Die Funktion ist jedoch monoton (wie die Definition direkt zeigt), und damit Riemann–integrierbar. Sie ist aber bei weitem nicht Cauchy–integrierbar.

Die Unstetigkeitsstellen der obigen Funktionen sind abzählbar. Das gilt für jede unstetige, monotone Funktion. Läßt man auch nicht-monotone Funktionen zu, so kann man das Beispiel noch verfeinern und Funktionen konstruieren, die überabzählbar viele Unstetigkeitspunkte besitzen, aber immer noch Riemann–integrierbar sind.

In Folge des Riemann-Integrals erwachte auch die Theorie der Fourierreihen zu neuer Blüte. Trotz der großen Erfolge des Riemann-Integrals auf der einen Seite stellten sich auch auf der anderen Seite gewisse Ungereimtheiten auf, von denen wir die wichtigsten auflisten wollen.

3.1 Schwächen des Riemann–Integrals, das Integral selbst betreffend

3.1.1 Vertauschung von Limes und Integration

Ein überaus wünschenswerter Satz wäre der folgende:

Satz 1: *Sei (f_n) eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$, die punktweise gegen eine beschränkte Funktion f konvergiere, d.h. $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ gilt für jedes $x \in [a, b]$. Dann ist f integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx\,.$$

Dieser Satz ist für das Riemann–Integral falsch, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt.

Gegenbeispiel: Sei $\{r_k\}$ eine Abzählung der rationalen Zahlen im Intervall $[0, 1]$. Wir definieren auf $[0, 1]$ die Funktionen

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \{r_1, \ldots, r_n\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die Voraussetzungen des Satzes 1 sind erfüllt: Die Funktionen f_n sind Riemann–integrierbar, da sie nur endlich viele Unstetigkeiten besitzen. Die Folge konvergiert monoton wachsend, d.h. $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ für alle x und n, und zwar offensichtlich gegen die Dirichlet–Funktion

$$\Theta(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0 & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases},$$

die bekanntlich nicht Riemann–integrierbar ist.

3.1.2 Integration als Umkehrung der Differentation

Satz 2: *Es sei F eine im Intervall $[a, b]$ definierte Funktion, die dort in jedem Punkt eine Ableitung F' besitzt, welche in $[a, b]$ beschränkt ist. Dann ist F' integrierbar und es gilt für jedes $x \in [a, b]$:*

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)\,dt\,.$$

Auch dieser Satz ist für das Riemann–Integral falsch, wie Volterra (1881) zeigte, indem er als Gegenbeispiel eine Funktion konstruierte, deren Ableitung auf dem ganzen Intervall existiert und dort beschränkt, jedoch nicht Riemann–integrierbar war. Dieses Beispiel ist etwas umfangreicher und kann im Buch von Benedetto ([1]), S. 20 f.) nachgelesen werden.

3.2 Schwächen des Riemann–Integrals, die Theorie der Fourierreihen betreffend

Da die Fourierkoeffizienten durch Integrale definiert sind, hängt die Theorie der Fourierreihen wesentlich vom zugrundeliegenden Integralbegriff ab. Ein anderer Integralbegriff liefert eine andere Theorie der Fourierreihen. Wir wollen nun zwei Punkte nennen, in denen das Riemann–Integral merkwürdige Ergebnisse lieferte.

3.2.1 Konvergenz der Fourierreihe

Riemann war wohl — wie auch die anderen Mathematiker seiner Zeit — der Meinung, daß die Fourierreihe einer stetigen Funktion (in jedem Punkt gegen diese) konvergiert. Umso erstaunter war die Fachwelt, als Paul du Bois-Reymond in den Göttinger Nachrichten von 1873 ein Beispiel einer überall stetigen Funktion angab, deren Fourierreihe in einem Punkt divergierte. Er verfeinerte später das Beispiel noch weiter und erhielt folgenden Satz (vgl. [5], S. 142).
Satz (Paul du Bois-Reymond, 1876): *Es gibt eine im Intervall* $[0, 2\pi]$ *stetige Funktion, deren Fourierreihe in einer dichten Punktmenge divergiert.*

3.2.2 Trigonometrische Reihen

Es ist interessant zu bemerken, daß sich Riemann in seiner Habilitationsschrift hauptsächlich mit allgemeinen trigonometrischen Reihen beschäftigte. Unter diesem Aspekt wird die folgende Frage von besonderer Wichtigkeit.
Frage: Unter welchen Bedingungen ist eine trigonometrische Reihe sogar eine Fourierreihe?
Daß irgendwelche Bedingungen gefordert werden müssen, zeigen schon einfache Beispiele. Wünschenswert wäre aber ein Satz folgender Form.
Satz: *Konvergiert eine trigonometrische Reihe (in jedem Punkt) gegen eine beschränkte Funktion, so ist diese schon eine Fourierreihe.*
Dieser Satz ist, wenn man den Riemannschen Integralbegriff zugrunde legt, falsch. Es war einer der größten Erfolge von Lebesgue, als er zeigen konnte ([12], S. 68 f.), daß dieser Satz mit seinem Integralbegriff richtig ist.

4 Fejér und seine neue Summationsmethode von Fourierreihen

Fejér veröffentlichte im Jahre 1904 eine später berühmt gewordene Arbeit unter dem Titel *Untersuchungen über Fouriersche Reihen* in den Mathematischen Annalen. Sie brachte einen noch ungewohnten Gedanken in die Theorie der Fourierreihen und ließ damit die ganze Konvergenztheorie in einem neuen Licht erscheinen. Der wesentliche Grundgedanke dieser Arbeit wurde schon vorher von ihm veröffentlicht in einer Comptes Rendus Note (Dez. 1900; siehe [5], S. 37–41). Die Ergebnisse der Arbeit selbst sind enthalten in der Dissertation des Autors (1902), die in ungarischer Sprache erschien (siehe [5], S. 56–94; deutsche Übersetzung [5], S. 94–135).

Ausgangspunkt für Fejér war die oben besprochene Tatsache, daß es stetige Funktionen gibt, deren Fourierreihe in gewissen Punkten divergiert. Das Problem von divergenten Reihen war seit den Tagen Eulers, Abels und Cauchys in der Analysis wohlbekannt. Die Idee, allgemeinere Summationsmethoden bei Zahlen- und Potenzreihen zu benutzen, wurde erst ab ca. 1880 systematisch untersucht. Hier sind Frobenius, Hölder, Cesàro und vor allen E. Borel zu nennen, der mit seinem 1901 erschienenen Buch *Leçons sur les séries divergentes* einen großen Teil der gewonnenen Ergebnisse zusammentrug und damit die Verbreitung förderte.
Die entscheidende Idee von Fejér war es, die einfachste dieser Summationsmethoden, diejenige von Cesàro über arithmetische Mittel, auf Fourierreihen anzuwenden.
Er erhielt dazu die Anregung in seinem Studiensemester 1899/1900 an der Berliner Universität durch Hermann Amandus Schwarz, der selbst im Jahre 1880 eine bekannte Arbeit über die Divergenz von Fourierreihen geschrieben hatte, in der er das Beispiel von Paul du Bois-Reymond vereinfachte.
Fejér beginnt seine Arbeit mit der Bemerkung, daß Dirichlet und wahrscheinlich auch noch Riemann glaubten, daß die zu einer stetigen Funktion gehörige Fourierreihe überall konvergent sei. Paul du Bois-Reymond hätte gezeigt, daß dies nicht der Fall sei, in dem er eine überall stetige Funktion konstruierte, deren Fourierreihe an überall dicht liegenden Stellen divergiert. Dann macht er eine im Hinblick auf die weitere Geschichte der Theorie der Fourierreihen interessante Äußerung, indem er sagt:

> *„Es bleibe nun dahingestellt, ob es stetige Funktionen gibt, deren Fourierreihe für jedes x divergiert, wie es z.B. stetige Funktionen gibt, die an keiner Stelle einen Differentialquotienten haben" (siehe [5], S. 142 f.).*

Seine Untersuchungen wurden dadurch allerdings nicht berührt. Sein Hauptergebnis lautet folgendermaßen.
Satz (Fejér, 1904): *Die arithmetischen Mittel der Teilsummen der Fourierreihe einer stetigen Funktion konvergieren überall (sogar gleichmäßig) gegen die Funktionen.*
Dieses Ergebnis bringt in gewisser Weise wieder die zuvor verloren geglaubte Harmonie in die Konvergenztheorie der Fourierreihen. Der Satz von Fejér wirkte wie eine Sensation und gab Anlaß zu einer ganzen Forschungsrichtung innerhalb der Fourieranalysis.

5 Die Schöpfung der modernen Integrationstheorie durch Lebesgue

Um die Jahrhundertwende schuf H. Lebesgue einen neuen Integralbegriff, der gegenüber dem Riemannschen zunächst die folgenden drei wesentlichen Vorteile brachte.

a) Die Klasse der, etwa auf dem Intervall $[a, b]$, Lebesgue-integrierbaren Funktion ist erheblich umfassender als die der Riemann-integrierbaren Funktionen. Damit sind mehr trigonometrische Reihen zugleich Fourierreihen.

b) Die Vertauschung von Integration mit Grenzübergängen ist an wesentlich schwächere Voraussetzungen gebunden, so gilt z.B. Satz 1 aus Abschnitt 3 beim Lebesgue-Integral, aber nicht beim Riemann-Integral.

c) Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, d.h. daß die Integration die Umkehrung der Differentation ist, gilt in viel allgemeinerem Rahmen.

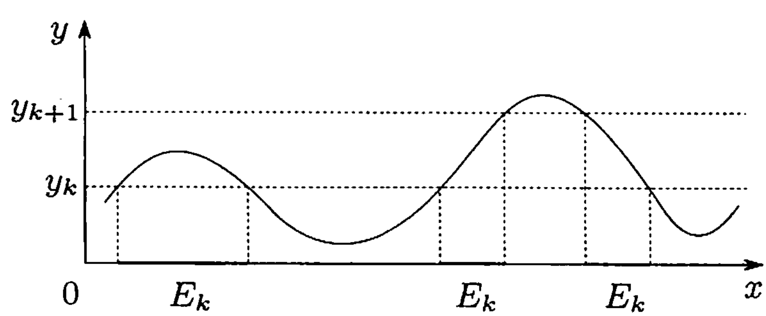
Um den Vorteil des Lebesgue-Integrals gegenüber dem Riemann-Integral besser zu erkennen, erinnern wir an die Definitionen.
Das bestimmte Riemann-Integral einer im Intervall $[a, b]$ gegebenen reellwertigen Funktion definierte Riemann ([15], S. 239) bekanntlich als Grenzwert von Integralsummen in der folgenden Form:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|Z|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) .$$

Dabei ist $Z : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ eine Zerlegung des Intervalles $[a, b]$, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ Zwischenpunkte und $|Z| = \max\{(x_k - x_{k-1}) : k = 1, \ldots, n\}$ die Feinheit der Zerlegung. Der Grenzübergang $|Z| \to 0$ bedeutet, daß die Summe gegen einen Grenzwert konvergiert, unabhängig von der Wahl der Zwischenpunkte ξ_k im betreffenden Intervall $[x_{k-1}, x_k]$. Dies impliziert, daß der Grenzwert, also das Riemann-Integral, nur dann existiert, wenn mit kleiner werdenden Intervallen die Funktionswerte $f(\xi_k)$ immer weniger schwanken, unabhängig davon, auf welche Weise ξ_k aus $[x_{k-1}, x_k]$ gewählt wurde. Lebesgue bemerkte, daß bei stark oszillierenden Funktionen der Riemannsche Integralbegriff versagte und erkannte den Grund dafür. Riemann geht von einer Zerlegung des Intervalles auf der x-Achse aus, was vernünftig ist, wenn man sich an nicht zu unstetigen Funktionen orientiert, aber unvernünftig bei schnell oszillierenden Funktionen, etwa bei der bekannten Dirichlet-Funktion im Intervall $[0, 1]$:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ rational} \\ 0 & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases} .$$

Dadurch existiert der Grenzwert der Riemannschen Integralsummen nicht. Um dies zu vermeiden, geht Lebesgue von einer Unterteilung der y-Achse (im Wertebereich $[A, B]$ der Funktion f) aus: $A = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = B$.



Bildet man die Mengen

$$E_k := \{x \in [a,b] \ : \ y_k \leq f(x) < y_{k+1}\} \ ,$$

dann kann (nach Definition) die Funktion f für $x \in E_k$ nicht stark oszillieren; man kann für f irgendeinen Funktionswert aus $[y_k, y_{k+1})$ nehmen, etwa y_k. Ist $m(E_k)$ die Länge (das Maß) von E_k, so ist das Integral (die Fläche) ungefähr

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot m(E_k) \ .$$

Diese Summe nahm Lebesgue als Grundlage für seinen Integralbegriff. Allerdings ist E_k jetzt kein Intervall mehr, wie bei Riemann, sondern eine im allgemeinen komplizierte Menge, für die man das Maß $m(E_k)$ definieren muß. Ausgangspunkt für Lebesgue war daher der 1898 von Borel eingeführte Begriff des Maßes einer Menge und desweiteren der Begriff der meßbaren Funktion. Wie Borel fordert er die Volladditivität (σ–Additivität) des Maßes m, d.h. es soll gelten

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) \ ,$$

falls die Mengen E_k paarweise disjunkt (und meßbar) sind.
Für das Lebesguesche Integral gelten nun die Sätze 1 und 2 aus dem vorigen Abschnitt. Darüber hinaus gilt der folgende wichtige Satz.

Satz (Lebesgue): *Sei (f_n) eine Folge integrierbarer Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$, die punktweise gegen eine Funktion f konvergiere, d.h. $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ gilt für jedes $x \in [a,b]$. Werden alle Funktionen f_n von einer integrierbaren Funktion g majorisiert, d.h. gilt $|f_n(x)| \leq g(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in [a,b]$, so ist f integrierbar und es gilt*

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \ .$$

Wichtig in der Lebesgueschen Integrationstheorie ist der Begriff der Nullmenge, d.h. einer Menge vom (Lebesgue–)Maß Null, und der damit verbundene Begriff „Der Eigenschaft f.ü. (fast überall)“.

Definition: Eine Menge $M \subset [a,b]$ hat das Maß Null, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ offene Intervalle I_n existieren mit

$$(1) \qquad M \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad \text{und} \quad (2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < \varepsilon \ .$$

Jede abzählbare Menge hat das Maß Null, aber auch gewisse überabzählbare Mengen wie z.B. die Cantormenge $[0,1] - \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, wobei I_n die Vereinigung der beim n–ten Schritt herausgenommenen Drittelintervalle ist. Wir sagen eine Eigenschaft gilt fast überall (f.ü.), falls sie überall gilt mit Ausnahme einer Nullmenge. In der Lebesgueschen Integrationstheorie kann man Mengen vom Maß Null beim Integrieren ignorieren, d.h. gilt $f(x) = g(x)$ f.ü. so folgt $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$. Daher gilt z.B. $\int_0^1 \Theta(x)\,dx = 0$. Desweiteren brauchen Funktionen nur f.ü. definiert zu sein u.s.w..

Mit diesem Begriff kann man auch sehr schön den Unterschied zwischen den stetigen und den Riemann-integrierbaren Funktionen herausarbeiten. Es gilt nämlich das folgende Ergebnis.

Satz: *Eine beschränkte Funktion f ist Riemann-integrierbar genau dann, wenn sie fast überall stetig ist.*

Die Lebesgue-integrierbaren Funktionen etwa in $[a, b]$, bilden eine wesentlich größere Klasse als die Riemann-integrierbaren.

Die bisher gebrachten Ergebnisse stehen alle in Lebesgues Dissertation von 1902. Die Dissertation ließ noch einige Fragen offen. Diese gelang Lebesgue 1904 in seinem Buch *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* ([11]) zu beantworten.

Als besonders wichtig erwies sich die Lebesguesche Integrationstheorie in der Theorie der Fourierreihen.

Obwohl das oben angesprochene Phänomen der Divergenz von Fourierreihen stetiger Funktionen bei Zugründelegung des Lebesgueschen Integralbegriffs natürlich in gleicher Weise auftritt, ermöglichte die Lebesgue-Theorie auf der anderen Seite neue Konvergenzbegriffe, z.B. Konvergenz f.ü., Konvergenz dem Maß nach, Konvergenz im (quadratischen) Mittel. Dadurch wurden viele neue Ergebnisse von abschließendem Charakter erhalten.

Lebesgue selbst verfaßte eine Monographie über Fourierreihen ([12]). Wir können darauf nicht eingehen und wollen nur ein Ergebnis erwähnen, welches falsch wird, wenn man das Riemann-Integral zugrunde legt.

Satz (Lebesgue, 1903): *Eine trigonometrische Reihe, die eine beschränkte Funktion darstellt, ist schon eine Fourierreihe.*

Es ist interessant, daß der große Durchbruch des Lebesgue-Integrals nicht durch die bisher beschriebenen Ergebnisse kam, sondern aus einer ganz anderen Richtung.

Darauf wollen wir jetzt eingehen und beschäftigen uns deshalb zuerst mit Integralgleichungen, ausgehend von Carl Neumann.

6 Carl Neumanns Weg von der Potentialtheorie zu den Integralgleichungen

Spezielle Integralgleichungsprobleme traten vereinzelt schon sehr früh auf, so bei Laplace (1782) und Abel (1823). Hier handelte es sich um reine Inversionsprobleme, d.h. die unbekannte Funktion trat nur einmal auf, und zwar im Integral. Der eigentliche Anstoß, sich mit Integralgleichungsproblemen systematisch zu befassen, kam von Randwertproblemen bei gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen her, beginnend mit Liouville (1837). Das folgende spezielle Randwertproblem der Potentialtheorie ist später entscheidend für die Entwicklung der Theorie der Integralgleichungen geworden.

6.1 Randwertproblem der Potentialtheorie

Gegeben ist ein ebenes Gebiet G mit stückweise glattem Rand ∂G. Auf dem Rand sei die stetige Funktion $f(s)$ als Funktion der Bogenlänge s gegeben. Gesucht ist eine Funktion $u = u(x, y)$ in $G \cup \partial G$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) u erfüllt die Laplace-Differentialgleichung

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{in } G\,;$$

(2) u erfüllt die Randbedingung

$$u = f \quad \text{auf } \partial G\,.$$

Bekanntlich ist die Funktion

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial G} \varrho(s) \log \frac{1}{r(x, y; s)}\, ds$$

eine Lösung dieser Randwertaufgabe. Dabei bezeichnet r den Abstand des Punktes (x, y) zum Randpunkt s und $\varrho(s)$ das Potential einer einfachen Belegung längs des Randes ∂G. Die Funktion $\varrho(s)$ ist allerdings noch unbekannt, d.h. wir haben eine Integralgleichung in ϱ.

Ohne diesen speziellen Fall weiter zu verfolgen, wollen wir jetzt gleich das allgemeine Problem aufstellen, welches den Hauptgegenstand der Theorie der linearen Integralgleichungen bildet.

Problem: Es sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f(s)$ bzw. $K(s, t)$ gegebene stetige reellwertige Funktionen auf $[a, b]$ bzw. dem Quadrat $[a, b] \times [a, b]$. Die Gleichung

$$\phi(s) - \lambda \int_a^b K(s, t)\phi(t)\, dt = f(s) \qquad a \le s \le b$$

heißt Fredholmsche Integralgleichung. Gesucht ist eine Lösung der Integralgleichung, d.h. eine Funktion $\phi(s)$, welche die Integralgleichung identisch erfüllt. $K(s, t)$ bezeichnet man als Kern der Integralgleichung. λ ist ein Zahlenparameter. Die Integralgleichung heißt *homogen*, falls $f(s) \equiv 0$ in $[a, b]$ ist, ansonsten *inhomogen.*

Homogenes Problem: Gesucht sind diejenigen Zahlen (Parameter) $\lambda = \lambda_n$ (später Eigenwerte genannt), für die eine Lösungsfunktion $\phi = \phi_\lambda \neq 0$ (später Eigenfunktion genannt) der homogenen Integralgleichung existiert.

Inhomogenes Problem: Zu gegebener rechter Seite $f(s)$ wird eine Lösung $\phi = \phi(\lambda, f, s)$ der Integralgleichung gesucht. Interessiert nur die Abhängigkeit von λ (bei festem f), so schreibt man oft $\phi(\lambda) = \phi_f(\lambda, s)$.

Carl Neumann gelangte 1877 ausgehend vom 1. Randwertproblem der Potentialtheorie zu inhomogenen Integralgleichungen obiger Form. Er entwickelte eine eigene Auflösungsmethode (siehe [13], Methode von Carl Neumann). Diese Methode besteht aus einem

Iterationsverfahren (sukzessive Approximation) der Form:

$$\phi_{n+1}(s) := \lambda \int_a^b K(s,t)\phi_n(t)\,dt + f(s) .$$

Als Ausgangsfunktion (nullte Näherung) wählt man $\phi_0 = 0$. In die obige Rekursionsformel eingesetzt ergibt sich die erste Näherung $\phi_1 = f$. Carl Neumann bewies (unter geeigneten Voraussetzungen) die Konvergenz der so iterativ gewonnenen Funktionen ϕ_n gegen eine Grenzfunktion ϕ, die Lösung. Diese läßt sich darstellen als eine Potenzreihe in λ, die sogenannte Neumannsche Reihe

$$\phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b K^{(n)}(s,t) f(t)\,dt \right\} \lambda^n + f(s) ,$$

wobei $K^{(n)}$ die sogenannten iterierten Kerne sind.

7 Poincarés Ausgangspunkt: Die schwingende Membran

Auch Poincaré kam in seiner diesbezüglichen Forschung von einem Randwertproblem der mathematischen Physik her. Er untersuchte in seiner berühmten Arbeit ([14]) von 1894 die Partielle Differentialgleichung der schwingenden Membran

$$\triangle\phi + \lambda\phi = 0$$

unter der Randbedingung (Einspannbedingung), daß $\phi = 0$ am Rand der Membran gilt. Poincaré zeigte die Existenz von abzählbar unendlich vielen diskreten Eigenwerten, die physikalisch den Frequenzen von Grundton und Obertönen der Membran entsprechen. Die zugehörigen Eigenfunktionen sind gerade die Eigenschwingungen der Membran. Das Wesentliche an Poincarés Arbeit sind jedoch die folgenden Untersuchungen, in deren Rahmen er den Existenzbeweis führt. Er betrachtet nämlich das inhomogene Randwertproblem

$$\triangle u + \lambda u = f(x,y)$$

mit einer hinreichend glatten Funktion f.

Die Lösung u, die von f und λ abhängt, stellt physikalisch gesprochen gerade eine erzwungene Schwingung dar. Er betrachtet diese Lösung $u(x,y,\lambda)$ (bei festem f) nur in Abhängigkeit von λ, für das er auch komplexe Werte zuläßt, und zeigt, daß sie (nach analytischer Fortsetzung) eine in der komplexen Zahlenebene meromorphe Funktion ist. Er macht die höchst erstaunliche Feststellung, daß die Polstellen dieser meromorphen Funktion gerade den Eigenwerten und die Residuen in diesen Stellen gerade den Eigenfunktionen des homogenen Problems entsprechen. Für alle Werte λ, die nicht Eigenwerte sind, ist also das inhomogene Randwertproblem für jede Funktion f eindeutig lösbar, umgekehrt ist für diejenigen Werte λ, die Eigenwerte sind, per definitionem das homogene Randwertproblem lösbar.

In späteren Arbeiten (1895/96) hat Poincaré das obige Randwertproblem in eine Integralgleichung der Form

$$\phi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\phi(t)\,dt = f(s)$$

umgeformt, ohne jedoch eine allgemeine Auflösungstheorie in Angriff zu nehmen. Das geschah erst durch Fredholm.

8 Fredholm, der Begründer der modernen Theorie der Integralgleichungen

Die obigen Untersuchungen von Poincaré waren es, von denen Fredholm ausging. Fredholm war Student von Mittag-Leffler in Stockholm gewesen und verbrachte kurz vor der Jahrhundertwende einen Forschungsaufenthalt in Paris, wo er insbesondere mit Poincaré und seinen Arbeiten in Berührung kam. Nach Beendigung seines Aufenthaltes in Paris sandte Fredholm seine erste kurze Note noch über Differentialgleichungen an Poincaré, der sie im August 1899 den Comptes Rendus weitergab, wo sie im Jahre 1900 veröffentlicht wurde. Im gleichen Jahr erschien seine erste kurze Abhandlung über Integralgleichungen in schwedischer Sprache, und 1902 folgten zwei Comptes Rendus Noten über diesen Gegenstand. Ein Jahr später erschien seine berühmte Arbeit ([7]) in den Acta Mathematica, wo er eine Zusammenfassung und Weiterführung seiner Theorie brachte. Wesentlich beeinflußt war Fredholm auch von Volterra, der zum ersten Mal eine Integralgleichung (Volterrasche Integralgleichung) als Grenzform eines linearen Gleichungssystems auffaßte. Dies scheint auch der Weg zu sein, den Fredholm (aus heutiger Sicht) bei seinen Integralgleichungen gegangen ist, obwohl er explizit in der Acta Arbeit nicht abgeleitet ist, sondern gleich mit Determinanten begonnen wird.

Der Weg, den in dieser Form erst ausdrücklich Hilbert (1904) beschreitet, ist der folgende: In der Integralgleichung

$$\phi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\phi(t)\,dt = f(s) \quad , \quad a \leq s \leq b$$

wird das Integral durch Riemann-Summen ersetzt. Man zerlegt das Integrationsintervall $[a,b]$ durch Punkte t_q $(q = 1,\ldots,n-1)$ in n gleiche Teile der Länge $\frac{b-a}{n}$ und erhält mit $t_n = b$ die Gleichung

$$\phi(s) - \lambda \frac{b-a}{n} \sum_{q=1}^{n} K(s,t_q)\phi(t_q) = f(s)\ .$$

Betrachtet man diese Gleichung nacheinander in den Punkten $s_1 = t_1$; $s_2 = t_2; \ldots, s_n = t_n$ allgemein $s_p = t_p$, so erhält man folgendes lineare Gleichungssystem für die Unbekannten $\phi(t_p)$; $p = 1,\ldots,n$:

$$\phi(t_p) - \lambda \frac{b-a}{n} \sum_{q=1}^{n} K(t_p,t_q)\phi(t_q) = f(t_p)\ .$$

Setzt man zur Abkürzung $\phi_p := \phi(t_p)$, $f_p := f(t_p)$, $K_{pq} := K(t_p, t_q)$, so lautet das Gleichungssystem in Matrixform geschrieben

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi n \end{pmatrix} - \lambda \frac{b-a}{n} \begin{pmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & \cdots & K_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Die Lösbarkeitsbedingungen für dieses lineare Gleichungssystem sind aus der linearen Algebra wohlbekannt. Man betrachtet die Determinante $D_n(\lambda)$ des Systems, die von λ und n abhängt. Zunächst sei n fest. $D_n(\lambda)$ ist bekanntlich ein Polynom in λ (charakteristisches Polynom). Ist λ keine Nullstelle des Polynoms, so ist das Gleichungssystem lösbar und man kann die Lösungen als Brüche von zwei Determinanten darstellen. Anschließend muß man den Grenzübergang $n \to \infty$ durchführen und zeigen, daß die von n abhängigen Lösungen der Gleichungssysteme gegen die Lösung der Integralgleichung konvergiert. Fredholm benutzt für seine Auflösung passend gebildete Determinantenformeln, die Helge von Koch ein paar Jahre zuvor entwickelt hatte. Für seine Konvergenzuntersuchungen braucht er auch Ergebnisse von Hadamard. Sein Hauptergebnis besagt, daß die inhomogene Integralgleichung für diejenigen λ eindeutig lösbar ist, für welche die „Determinante" $D(\lambda) = \lim_{n\to\infty} D_n(\lambda)$ ungleich Null ist. Er stellt die Analogie zur endlich dimensionalen linearen Algebra her durch die folgende Alternative.

Fredholmsche Alternative: Entweder ist die inhomogene Integralgleichung lösbar bei beliebiger rechter Seite $f(s)$, oder die zugehörige homogene Integralgleichung besitzt nichttriviale Lösungen.

9 Hilberts allgemeine Auflösungstheorie für lineare Integralgleichungen

Den Anstoß zur Beschäftigung mit der Theorie der Integralgleichungen erhielt Hilbert durch einen Vortrag des aus Uppsala kommenden schwedischen Mathematikers E. Holmgren, den dieser im Wintersemester 1900/01 in Hilberts Seminar hielt. Holmgren sprach über eine neue Theorie zur Auflösung von Integralgleichungen, die sein Lehrer Ivar Fredholm entwickelt hatte, und von der bis dahin nur eine kurze Note in schwedischer Sprache veröffentlicht worden war (Förh. Stockholm. erschienen 10. 01. 1900). Hilbert fing sofort Feuer und begann auf diesem neuen Gebiet zu arbeiten.

Im Sommersemester 1904 hielt er in Göttingen eine Vorlesung über diesen Gegenstand. Darüber hat der Physiker Max Born in seiner Autobiographie ([2], S. 126 f.) folgendermaßen berichtet:

> *„Nachdem Hilbert dieses große Programm abgeschlossen hatte [Grundlagen der Geometrie], nahm er ein neues Gebiet in Angriff, die [...] Theorie der Integralgleichungen. Unter Hilberts Händen verwandelte sie sich aus einem speziellen Seitenzweig der Analysis in die grundlegende Erforschung der allgemeinen Gesetzmäßigkeit der linearen Beziehungen zwischen unendlich vielen*

> *Variablen. Diese Beziehungen beinhalten nicht nur die Fredholmschen Gleichungen als einen Sonderfall, sondern auch die gesamte Funktionentheorie und die unzähligen Differentialgleichungen, die in den vielen Teilen der Mathematik und der mathematischen Physik vorkommen. Hilberts Arbeit bildete später die Grundlage der modernen Quantentheorie, in der sogar Physiker den Ausdruck Hilbert-Raum für die Erweiterung des Raumbegriffs auf eine unendliche Anzahl von Dimensionen verwenden, mit deren Hilfe die Zustände physikalischer Systeme und ihre Veränderungen beschrieben werden.*
>
> *Wenn Hilbert an solch einer neuen Sache arbeitete, pflegte er eine Vorlesung mit einem harmlosen Titel, etwa* Differential- und Integralgleichungen, *anzukündigen, und dann entwickelte er in diesem Rahmen seine neuen Ideen, oft mit revolutionären Konsequenzen. Eine derartige Vorlesung besuchte ich in meinem ersten Semester [SS 1904] in Göttingen. Ich habe bereits erwähnt, daß dort ein bestimmter Student immer beauftragt wurde, die Vorlesung sehr sorgfältig auszuarbeiten und mehrere maschinengeschriebene Kopien herzustellen, von denen eine den Studenten im Mathematischen Leseraum zugänglich gemacht wurde. In der ersten Vorlesung bat Hilbert die Studenten, mit ihren Notizen nach vorn zu kommen. Etwa ein halbes Dutzend bot ihm seine Manuskripte an, darunter auch ich. Zu Beginn der zweiten Vorlesung sagte er: „Es gibt ein Manuskript, das alle andern bei weitem übertrifft, und ich bitte Herrn Born, die Ausarbeitung meiner Vorlesung für mich und den Leseraum zu übernehmen." Es war mir höchst peinlich, daß ich vortreten und unter den Augen der riesigen Zuhörermenge mein Manuskript holen mußte, doch ich war auch sehr glücklich — und mit gutem Grund. Denn ich hatte jetzt den engsten Kontakt mit dem großen Mathematiker; jedes Mal, wenn Hilbert meinen Entwurf der Ausarbeitung gelesen hatte, gab es mit ihm eine lange Diskussion über Fehler und mögliche Verbesserungen, und ich hatte die Gelegenheit, einen Blick auf die Arbeit eines der mächtigsten Gehirne jener Zeit zu werfen. Doch mehr als das; Hilbert fand gleich bei unserer ersten Begegnung Gefallen an mir und behandelte mich bald wie einen vertrauten jungen Freund."*

Hilberts Arbeiten über Integralgleichungen sind in sechs Mitteilungen in den Göttinger Nachrichten aus den Jahren 1904, 1905, 1906 und 1910 niedergelegt und in dem Lehrbuch „*Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*" (Teubner 1912) zusammengefaßt (siehe [9]). Mehrere Schüler Hilberts arbeiteten auch auf diesem Gebiet und führten seine Untersuchungen weiter oder ergänzten sie in wesentlichen Punkten, so insbesondere Erhard Schmidt in seiner Dissertation von 1905. (Math. Ann. **63** (1907), 433–476).

Bei Hilbert sind zwei Perioden bezüglich seiner Arbeiten zu Integralgleichungen scharf zu trennen.

1. Periode (1904): Endliche Gleichungssysteme

Hilbert betrachtet bei seiner Theorie der linearen Integralgleichungen *symmetrische Kerne*, d.h. Kerne, bei denen $K(s,t) = K(t,s)$ für alle s,t gilt; dies ist ein Charakteristikum für den Aufbau seiner Theorie. Daß dies eine natürliche Forderung ist, sieht man etwa bei der Anwendung auf Eigenwertprobleme bei linearen gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen, denn dort ist der Kern gerade die Greensche Funktion, und diese ist naturgemäß symmetrisch.

Hilbert gelangt nun von der Integralgleichung durch Diskretisierung zu *endlichen* linearen Gleichungssystemen und gewinnt Aussagen über die Lösungen des homogenen und inhomogenen Problems durch Grenzübergang aus dem Endlichen (1. Mitteilung von 1904). Danach gibt er Anwendungen für Randwertprobleme bei Differentialgleichungen und beim Dirichlet-Problem (2. und 3. Mitteilung von 1904 und 1905). Das Hauptergebnis der 1. Periode ist der folgende Satz.

Entwicklungssatz (Hilbert, 1904; E. Schmidt, 1905):

Gegeben sei die lineare Integralgleichung

$$\phi(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\phi(t)\,dt = f(s) \quad , \quad a \le s \le b$$

mit einer in $[a,b]$ stetigen Funktion f und einem in $[a,b] \times [a,b]$ stetigen, symmetrischen Kern $K(s,t)$.

Dann hat das homogene Problem abzählbar viele Eigenwerte λ_n mit zugehörigen Eigenfunktionen ϕ_n, aus denen man ein Orthonormalsystem bilden kann, so daß jede Funktion g der Form

$$g(s) = \int_a^b K(s,t)h(t)\,dt$$

mit willkürlicher in $[a,b]$ stetiger Funktion h eine Fourierentwicklung der Form

$$g(s) = c_1\phi_1(s) + c_2\phi_2(s) + \dots\ .$$

besitzt. Dabei sind

$$c_n = \int_a^b g(s)\phi_n(s)\,ds$$

die Fourierkoeffizienten (bezüglich des Orthonormalsystems).

Die Fourierkoeffizienten erfüllen die Relation

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \int_a^b g^2(s)\,ds\ .$$

2. Periode (1906): Unendliche Gleichungssysteme

In seiner 4. und 5. Mitteilung aus dem Jahre 1906 hat Hilbert eine vollkommen neue Auflösungstheorie für die oben betrachtete lineare Integralgleichung gegeben. Im Gegensatz zur 1. Periode arbeitet hier Hilbert von vornherein mit linearen Gleichungssystemen mit *unendlich* vielen Unbekannten. Wir wollen den entscheidenden Kern der Theorie hier wiedergeben (vgl. [9], S. 179 ff.) Die Lösung der linearen Integralgleichung wird auf die Lösung eines unendlichen linearen Gleichungssystems in den Unbekannten $c_1, c_2, c_3, \ldots$ zurückgeführt, deren Quadratsumme $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ konvergiert. Die Verbindung zwischen diesen beiden unterschiedlichen Aufgaben wird geschaffen durch ein vollständiges Orthonormalsystem $\{\phi_n\}_1^\infty$ im Prähilbertraum $C[a,b]$ mit dem inneren Produkt $(u,v) := \int_a^b u(s)v(s)\,ds$, wie wir heute sagen würden. Gegeben sei also die inhomogene lineare Integralgleichung, wobei wir statt bisher für $-\lambda K(s,t)$ mit Hilbert einfach $K(s,t)$ schreiben, was für das inhomogene Problem natürlich ohne Belang ist. Damit haben wir als Integralgleichung

$$\phi(s) + \int_a^b K(s,t)\phi(t)\,dt = f(s) \qquad (a \le s \le b)\,.$$

Übrigens braucht für die folgenden Betrachtungen der Kern nicht notwendig symmetrisch zu sein. Da wir das inhomogene Problem betrachten, sei $f(s) \not\equiv 0$ in $[a,b]$, f und K seien wie bisher stetige reellwertige Funktionen auf $[a,b]$ bzw. $[a,b] \times [a,b]$.
Das Problem besteht nun im Auffinden der unbekannten Funktion ϕ. Dazu wird ϕ verwandelt in eine Zahlenfolge (c_n), indem man ϕ die Fourierkoeffizienten bezüglich des Orthonormalsystems $\{\phi_n\}$ zuordnet, d.h.

$$c_n = (\phi, \phi_n) = \int_a^b \phi(s)\phi_n(s)\,ds\,.$$

Nun sind die Unbekannten die c_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Da das Orthonormalsystem ϕ_n vollständig ist, gilt die Parsevalsche Formel

$$(u,v) = \sum_{n=1}^{\infty} (u,\phi_n)(v,\phi_n)\,.$$

Dies liefert angewandt auf $u = v = \phi$ zum einen

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \int_a^b \phi^2(s)\,ds \text{ , also insbesondere } \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$$

und zum andern angewandt auf

$$u(t) = K(s,t) \quad \text{und} \quad v(t) = \phi(t)$$

die Gleichung

$$\int_a^b K(s,t)\phi(t)\,dt = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(s)c_m\,,$$

wobei $K_m(s) := \int_a^b K(s,t)\phi_m(t)\,dt$ ist.
Dadurch wird die Integralgleichung umgeformt in die Gleichung

$$\phi(s) + \sum_{m=1}^{\infty} K_m(s)c_m = f(s)\,.$$

Die in dieser Gleichung vorkommende unendliche Reihe konvergiert gleichmäßig in s. Um das einzusehen, wendet man das Weierstraßsche Majorantenkriterium und zuvor die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung an und beachtet, daß

$$\sum_{m=1}^{\infty} K_m^2(s) = \int_a^b K^2(s,t)\,dt \le \text{Const.}$$

aus der Bedingung der Stetigkeit für K folgt.
Die obige Gleichung wird nun mit ϕ_n durchmultipliziert und anschließend integriert. Man erhält

$$c_n + \sum_{m=1}^{\infty} K_{nm} c_m = f_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,.$$

wobei $K_{nm} := \int_a^b K_m(s)\phi_n(s)\,ds$ und $f_n = \int_a^b f(s)\phi_n(s)\,ds$ die Fourierkoeffizienten von f sind.
Damit haben wir die Integralgleichungen in dieses unendliche System von linearen Gleichungen in den Unbekannten $c_n\,(n = 1, 2, \ldots)$ mit konvergenter Quadratsumme übergeführt. Ist $\phi \in C[a, b]$ eine Lösung der Integralgleichung, so sind, wie wir gesehen haben, die Fourierkoeffizienten $c_n = (\phi, \phi_n)$ eine Lösung dieses unendlichen Gleichungssystems, die $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$ erfüllt.
Umgekehrt ergibt sich: Ist (c_n) eine beliebige Zahlenfolge mit konvergenter Quadratsumme Lösung des obigen unendlichen Gleichungssystems, so erhält man durch

$$\phi(s) = f(s) - \sum_{n=1}^{\infty} K_n(s) c_n$$

eine stetige Lösung der Integralgleichung.
Für stetige Funktionen ϕ, K, f erhält man auf diese Weise eine schöne geschlossene Theorie. Schon früh gab es allerdings aus der Praxis herrührende Integralgleichungen, bei denen der Kern K unstetig war. Man erkennt, daß für viele der obigen Ableitungen die Stetigkeit der beteiligten Funktionen nicht wesentlich ist. Entscheidend ist vielmehr die quadratische Integrierbarkeit und damit zusammenhängend die Parsevalsche Gleichung

$$\int_a^b \phi^2(s)\,ds = (\phi, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\,.$$

Bezeichnet man mit R^2 die Klasse der auf dem Intervall $[a, b]$ quadratisch Riemann-integrierbaren Funktionen ϕ, d.h. es gilt $\int_a^b \phi^2(s)\,ds < \infty$, dann kann man folgendes schließen:
Folgerung: $\phi \in R^2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty.$
Ein Problem, das sich an dieser Stelle aufdrängt, und welches höchstwahrscheinlich von einigen Mathematikern, die sich mit Integralgleichungen beschäftigten, betrachtet wurde, ist das folgende.

Mögliches Problem von 1904: Gilt in der obigen Folgerung auch die Umkehrung, d.h. gibt es zu einer beliebigen Zahlenfolge c_n mit der Eigenschaft $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$ eine Funktion $\phi \in R^2$ derart, daß die c_n gerade die Fourierkoeffizienten von ϕ bezüglich eines Orthonormalsystems ϕ_n sind, d.h. gilt $c_n = (\phi, \phi_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$?
Daß dieses so gestellte Problem in eine Sackgasse führt, wurde erst später klar, denn der Riemannsche Integralbegriff ist prinzipiell unzureichend. Eine Lösung gelang allerdings nicht Hilbert oder einem seiner engeren Schüler, sondern einem jungen ungarischen Mathematiker, der 1901/02 und 1903/04 Vorlesungen bei Hilbert in Göttingen gehört hatte: Friedrich Riesz.
Er benutzte den gerade erst geschaffenen Lebesgueschen Integralbegriff.

10 Die Verknüpfung des Lebesgue–Integrals mit Integralgleichungen durch Friedrich Riesz

Friedrich Riesz brachte die Hilbertsche Theorie der Integralgleichungen in Verbindung zur Lebesgueschen Integrationstheorie. Er merkte, daß der für das im vorigen Abschnitt angesprochene Problem adäquate Raum der der im Lebesgueschen Sinne quadratintegrierbaren Funktionen

$$L^2 := \left\{ f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \,:\, f \text{ Lebesgue–meßbar und } \int_0^{2\pi} f^2(s)\, ds < \infty \right\}$$

ist. Dabei haben wir hier als Intervall $[a, b]$ geeigneterweise $[0, 2\pi]$ gewählt. Es ist interessant zu verfolgen, wie ihm der Gedanke gekommen sein mag, daß der Raum L^2 der geeignete Kandidat für das Problem sei. Naheliegend ist die Vermutung, daß ihm die Idee beim Lesen der Lebesgueschen Dissertation [10] von 1902 kam oder beim Studium von Lebesgues Schriften über Integrationstheorie [11] oder über trigonometrische Reihen [12]. Dem war jedoch nicht so.
Den Anstoß erhielt er durch die berühmte Acta–Arbeit [4] von Fatou aus dem Jahre 1906, die aber ein anderes Thema behandelt, nämlich Randwerteigenschaften von gewissen im Einheitskreis harmonischen und holomorphen Funktionen. Dies hat Riesz 40 Jahre später selbst bestätigt (siehe [18], S. 327).
Daß es so gewesen sein muß, geht aber auch direkt aus F. Riesz Arbeiten ([16], [17]) aus dem Jahre 1907 hervor, wo er im Beweis seines Hauptsatzes ganz wesentlich ein Ergebnis über das Poissonintegral aus dieser Fatouschen Arbeit benutzt ([4], S. 346). Die Idee, den Raum L^2 bei seinen Betrachtungen zugrunde zu legen, scheint ihm auch durch die Fatousche Arbeit gekommen zu sein, und zwar folgendermaßen. In der Hilbertschen Integralgleichungstheorie von 1906 spielt, wie wir im vorigen Abschnitt dargelegt haben, die Parsevalsche Gleichung eine entscheidende Rolle. Diese Gleichung wird in der Fatouschen Arbeit ([4], S. 379) zum ersten Mal ausgedehnt auf den Raum L^2 und gewinnt dadurch ihre endgültige Gestalt. Sie lautet:

Parsevalsche Gleichung (Fatou; 1906): *Sind c_n die Fourierkoeffizienten einer Funktion f aus L^2 bezüglich eines vollständigen Orthonormalsystems, so gilt*

$$\int_0^{2\pi} f^2(s)\,ds = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 .$$

Damit war es nur noch ein kleiner Schritt zu dem Hauptergebnis von Friedrich Riesz, welches das Problem aus Abschnitt 9 löst. Das Ergebnis ist uns heute bekannt unter dem folgenden Namen.

Satz von Riesz–Fischer (1907): *Sei $\{\phi_n\}_1^\infty$ ein vollständiges Orthonormalsystem im Raum L^2.*

(a) *Ist $\phi \in L^2$ eine beliebige Funktion, so gilt für die Fourierkoeffizienten $c_n = (\phi, \phi_n)$ die Ungleichung $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$.*

(b) *Ist umgekehrt (c_n) eine beliebige Folge von Zahlen mit $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$, so gibt es eine Funktion $\phi \in L^2$ derart, daß die c_n die Fourierkoeffizienten von ϕ sind, d.h. es gilt $c_n = (\phi, \phi_n)$ für alle n.*

Teil (a) ist die einfache Richtung, sie folgt direkt aus der Besselschen Ungleichung. Der nichttriviale Teil ist (b).

Der F. Rieszsche Originalbeweis des Teiles (b)

Riesz betrachtet das Orthonormalsystem $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\right\}_1^\infty$. Viel durchsichtiger wird jedoch sein Beweis, wenn man den komplexen Raum L^2 mit dem vollständigen Orthonormalsystem $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}\right\}_{-\infty}^{\infty}$ betrachtet; zu einer Funktion $f \in L^2$ hat man dann die Fourierkoeffizienten $c_n = (f, e^{int}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$ und die Fourierreihe $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}$.

Der Ausgangspunkt für den Teil (b) ist aber nun gerade umgekehrt: Gegeben ist eine (jetzt komplexe) Zahlenfolge (c_n) mit $\sum_{-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 < \infty$. Gesucht ist eine Funktion $f \in L^2$, so daß

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt.

F. Riesz geht folgendermaßen vor: Er betrachtet die mit c_n formal gebildete trigonometrische Reihe $\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} = c_0 + \sum_{n\neq 0} c_n e^{int}$, von der er zeigen will, daß sie sogar eine Fourierreihe ist. Er betrachtet diese Reihe ohne absolutes Glied, integriert formal gliedweise und erhält

$$\sum_{n\neq 0} \frac{1}{i\,n} c_n e^{int} .$$

Jetzt nutzt er die Voraussetzung $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} c_n^2 < \infty$ aus. Diese garantiert ihm, daß die so formal gebildete Reihe gleichmäßig gegen eine Funktion F von beschränkter Schwankung konvergiert, d.h. es gilt $F(t) = \sum\limits_{n\neq 0} \frac{1}{in} c_n e^{int}$. Er wendet nun den Lebesgueschen Satz an (siehe z.B. [1], S. 135), welcher besagt, daß eine Funktion von beschränkter Schwankung f.ü. differenzierbar ist, d.h. $F'(t)$ existiert f.ü. Er setzt

$$f(t) = c_0 + F'(t) \, .$$

Die Schwierigkeit besteht darin zu zeigen, daß erstens die Funktion f aus L^2 ist und zweitens die c_n die Fourierkoeffizienten von f sind.
Dazu betrachtet er das mit F gebildete Poisson-Integral

$$F(r,\Theta) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r,\Theta - t) F(t)\, dt \, .$$

Dabei ist P der Poissonkern für den Einheitskreis. Bekanntlich ist $F(r,\Theta)$ eine im Einheitskreis harmonische Funktion. Benutzt man die Darstellung ([20], S. 111)

$$P(r,\Theta - t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in(\Theta - t)}$$

für den Poissonkern und die eben abgeleitete Reihendarstellung für $F(t)$, so erhält man oben eingesetzt, nachdem man Integration und Summation vertauscht hat (was für $r < 1$ zulässig ist), die Darstellung

$$F(r,\Theta) = \sum_{n\neq 0} \frac{1}{in} c_n r^{|n|} e^{in(\Theta - t)} \, .$$

Die Funktion $F(r,\Theta)$, die auch noch von r abhängt, ist als harmonische Funktion für $r < 1$ beliebig oft nach r und Θ differenzierbar, da die Reihe in jedem kompakten Teil des Einheitskreises gleichmäßig in r und Θ konvergiert. Die Ableitung von F nach Θ kann man daher durch gliedweise Differentation gewinnen. Man erhält

$$\frac{\partial F(r,\Theta)}{\partial \Theta} = \sum_{n\neq 0} c_n r^{|n|} e^{in\Theta} \, ,$$

d.h. die Ableitung dieser Funktion ist gleich ihrer Fourierreihe und die Fourierkoeffizienten sind $c_n r^{|n|}$.
Um den Grenzübergang $r \to 1$ durchzuführen, benutzt nun F. Riesz folgenden Satz von Fatou ([4], S. 346; siehe auch [8], S. 334, Satz 2).
Satz (Fatou, 1906): *Hat die Funktion F für $\Theta = \Theta_0$ eine endliche Ableitung $F'(\Theta_0)$, so gilt*

$$\lim_{r\to 1} \frac{\partial F(r,\Theta)}{\partial \Theta} = F'(\Theta_0) \, ,$$

wobei die Annäherung radial erfolgt, d.h. es ist $\Theta = \Theta_0$.
Um auch noch $F'(t) \in L^2$ zu erhalten bemerkt Riesz, daß die Funktionen $\frac{\partial F(r,\Theta)}{\partial \Theta}$, die für jedes feste $r > 1$ natürlich aus L^2 sind, sogar gleichmäßig L^2-beschränkt sind (bezüglich $r \to 1$). Dann ist die Grenzfunktion $F'(t)$ und damit auch $f(t)$ aus L^2 und die Fourierkoeffizienten von $f(t)$ sind die Grenzwerte der Fourierkoeffizienten der Funktionen $\frac{\partial F(r,\Theta)}{\partial \Theta}$ für $r \to 1$, d.h. die Fourierkoeffizienten der Grenzfunktion sind $\lim\limits_{r \to 1} c_n r^{|n|}$, d.h. c_n ($n \in \mathbf{Z}$), was zu zeigen war. Damit sind die beiden Behauptungen bewiesen.

11 Schlußbemerkungen

Friedrich Riesz hat durch seine Ergebnisse die Hilbertsche Theorie der Integralgleichungen durch Heranziehung des Lebesgue–Integrals und des Raumes L^2 der quadratisch Lebesgue-integrierbaren Funktionen in eine befriedigende und endgültige Form gebracht. Die der Theorie zugrundeliegende Eigenschaft des Raumes L^2 ist die der Vollständigkeit (die dem entsprechenden Raum R^2 der quadratisch Riemann–integrierbaren Funktionen nicht zukommt). Dies hat auch E. Fischer bemerkt und seine Arbeit über diesen Gegenstand ist im gleichen Band (Nr. 144) der Comptes Rendus von 1907 erschienen, in der die Rieszsche Arbeit [16] zu finden ist.
Von diesen Arbeiten von Hilbert (1906), F. Riesz (1907) und E. Fischer (1907) hat die moderne Funktionalanalysis wesentlich ihren Ausgangspunkt genommen (siehe dazu auch [3], S. 119 f.). Sie hat sich bald zu kräftiger Blüte entwickelt und ist zu einer grundlegenden Disziplin innerhalb der Mathematik geworden. Einen Aufbau der Funktionalanalysis in diesem Sinne findet man in dem bekannten Buch von Riesz und Sz.-Nagy [19]. Einige Aspekte der weiteren Entwicklung der Theorie der Integralgleichungen sind auch im Buch von Dieudonné [3] dargestellt.

Literaturverzeichnis

[1] J.J. BENEDETTO: Real Variable and Integration. Stuttgart (Teubner) 1976.

[2] M. BORN: Mein Leben. Die Erinnerungen des Nobelpreisträgers. München (Nymphenburger) 1975.

[3] J. DIEUDONNÉ: History of Functional Analysis. Amsterdam (North–Holland) 1981.

[4] P. FATOU: Séries trigonométriques et séries de Taylor. Acta Math. **30** (1906), 335–400.

[5] L. FEJÉR: Gesammelte Arbeiten, Band I. Basel (Birkhäuser) 1970.

[6] J. FOURIER: Théorie Analytique de la Chaleur. Paris 1822. (Engl. Übersetzung durch A. Freeman, Cambridge 1878. Dover Reprint 1955).

[7] I. FREDHOLM: Sur une classe d'équations fonctionnelles. Acta Math. **27** (1903), 365–390.

[8] G.M. GOLUSIN: Geometrische Funktionentheorie. Berlin (DVW) 1957.

[9] D. HILBERT: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Leipzig (Teubner) 1912. Chelsea Reprint 1953.

[10] H. LEBESGUE: Integrale, Longueur, Aire. Annali di Mat. **7** (1902), 231–358.

[11] H. LEBESGUE: Leçons sur l'integration et la recherche des fonctions primitives. Paris 1904; 2. Aufl. 1928.

[12] H. LEBESGUE: Leçons sur les séries trigonométriques. Paris (Sammlung Borel) 1906.

[13] C. NEUMANN: Untersuchungen über das logarithmische und Newtonsche Potential. Leipzig (Teubner) 1877.

[14] H. POINCARÉ: Sur les équations de la physique mathématique. Rend. Palermo **8** (1894), 57–156.

[15] B. RIEMANN: Gesammelte mathematische Werke. 2. Aufl. 1892. Nachdruck 1953 bei Dover Publications mit einer Einführung durch Hans Lewy.

[16] F. RIESZ: Sur les systèmes orthogonaux de fonctions. Comptes Rendus (Paris) **144** (1907), 615–619.

[17] F. RIESZ: Über orthogonale Funktionensysteme. Göttinger Nachrichten von 1907, 116–122; vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 9. März 1907.

[18] F. RIESZ: Gesammelte Arbeiten, 1. Band. Budapest (Akadémiai Kiadó) 1960.

[19] F. RIESZ und B. SZ.-NAGY: Vorlesungen über Funktionalanalysis.
2. ber. Aufl. Berlin (DVW) 1968.

[20] W. RUDIN: Real and Complex Analysis. Third edition New York (Mc Graw–Hill) 1986.