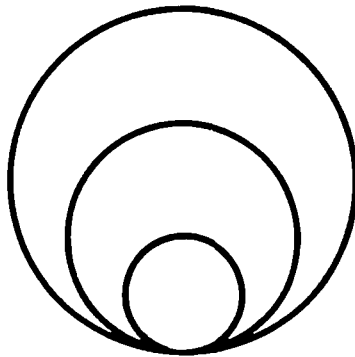


1
Berliner Studienreihe zur Mathematik

Horst Herrlich

Einführung in die Topologie

unter Mitarbeit von H. Bargenda und C. Trompelt



Heldermann Verlag Berlin



Berliner Studienreihe zur Mathematik

herausgegeben von

Prof. Dr. R. Gorenflo

und

Prof. Dr. H. Lenz

Freie Universität Berlin

Fachbereich Mathematik

Arnimallee 3

D-1000 Berlin-West 33

Diese Buchreihe in deutscher Sprache wendet sich an Studenten der Mathematik.
Die Texte sind meist aus Vorlesungen entstanden und deshalb geeignet, als
Grundlage oder Ergänzung zu Veranstaltungen des behandelten Themas zu dienen.

Horst Herrlich
Fachbereich Mathematik
Universität Bremen
Postfach 33 04 40
D-2800 Bremen 33

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Herrlich, Horst: Einführung in die Topologie / von Horst Herrlich. Unter Mitarb.
von Hubertus Bargenda u. Carsten Trompelt.
Berlin: Heldermann, 1986.
(Berliner Studienreihe zur Mathematik; Bd. 1)
ISBN 3-88538-101-X
NE: GT

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt.
Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne
Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für
Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung
und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

© Copyright 1986, Heldermann Verlag, Nassauische Str. 26, D-1000 Berlin 31.

ISBN 3-88538-101-X

INHALTSVERZEICHNIS

Seite

VORWORT

ALLGEMEINE STUDIERHINWEISE

§ 1	METRISCHE RÄUME, GRUNDBEGRIFFE UND BEISPIELE	- 1 -
	STUDIERHINWEISE ZU § 1	- 1 -
1.0	EINFÜHRUNG	- 1 -
1.1	DEFINITION UND BEISPIELE	- 2 -
1.2	PUNKTE UND MENGEN IN METRISCHEN RÄUMEN	- 9 -
1.3	FOLGEN	- 20 -
§ 2	ABBILDUNGEN ZWISCHEN METRISCHEN RÄUMEN, STETIGKEIT UND GLEICHMÄSSIGE STETIGKEIT	- 28 -
	STUDIERHINWEISE ZU § 2	- 28 -
2.0	EINFÜHRUNG	- 28 -
2.1	STETIGKEIT UND GLEICHMÄSSIGE STETIGKEIT, DEFINITION, CHARAKTERISIERUNG, BEISPIELE	- 29 -
2.2	ÄQUIVALENTE METRIKEN, ISOMORPHISMEN	- 36 -
2.3	FORTSETZUNG (GLEICHMÄSSIG) STETIGER ABBILDUNGEN NACH $[0,1]$, $[0,1[$ UND $\mathbb{R}$	- 42 -
§ 3	VOLLSTÄNDIGE METRISCHE RÄUME	- 50 -
	STUDIERHINWEISE ZU § 3	- 50 -
3.0	EINFÜHRUNG	- 50 -
3.1	CAUCHY-FOLGEN, VOLLSTÄNDIGKEIT METRISCHER RÄUME	- 51 -
3.2	FORTSETZUNG (GLEICHMÄSSIG) STETIGER ABBILDUNGEN IN VOLLSTÄNDIGE METRISCHE RÄUME	- 56 -
3.3	DER BANACHSCHE FIXPUNKTSATZ	- 61 -
3.4	DER BAIRESCHES KATEGORIENSATZ	- 65 -
3.5	TOPOLOGISCH VOLLSTÄNDIGE RÄUME	- 69 -
3.6	VERVOLLSTÄNDIGUNG METRISCHER RÄUME	- 72 -
§ 4	TOTAL BESCHRÄNKTE UND KOMPAKTE METRISCHE RÄUME	- 79 -
	STUDIERHINWEISE ZU § 4	- 79 -

	Seite
4.0 EINFÜHRUNG	- 79 -
4.1 TOTAL BESCHRÄNKTE METRISCHE RÄUME	- 80 -
4.2 KOMPAKTE METRISCHE RÄUME	- 85 -
4.3 TOPOLOGISCHE CHARAKTERISIERUNG KOMPAKTER RÄUME	- 92 -
§ 5 ZUSAMMENHANGSEIGENSCHAFTEN METRISCHER RÄUME	- 96 -
STUDIERHINWEISE ZU § 5	- 96 -
5.0 EINFÜHRUNG	- 96 -
5.1 ZUSAMMENHÄNGENDE METRISCHE RÄUME	- 98 -
5.2 TOTAL-UNZUSAMMENHÄNGENDE METRISCHE RÄUME	- 110 -
5.3 DAS CANTORSCHES DISKONTINUUM <u>$\mathbb{D}$</u>	- 114 -
5.4 DER ZERBRECHLICHE KEGEL <u>$\mathbb{K}$</u>	- 122 -
§ 6 FUNKTIONENRÄUME	- 125 -
STUDIERHINWEISE ZU § 6	- 126 -
6.0 EINFÜHRUNG	- 126 -
6.1 DIE METRISCHEN RÄUME <u>X^n</u>	- 128 -
6.2 DIE METRISCHEN RÄUME <u>$X^{\mathbb{N}}$</u>	- 134 -
6.3 DER RAUM <u>$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$</u> UND DAS CANTORSCHES DISKONTINUUM <u>$\mathbb{D}$</u>	- 141 -
6.4 DER HILBERT-QUADER <u>$\mathbb{H} = [0,1]^{\mathbb{N}}$</u>	- 143 -
6.5 DER RAUM <u>$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$</u> UND DER RAUM <u>$\mathbb{P}$</u> DER IRRATIONALZAHLEN	- 147 -
6.6 GLEICHMÄSSIGE KONVERGENZ IN <u>$C(X)$</u>	- 149 -
6.7 EINFACHE KONVERGENZ IN <u>$\text{ABB}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$</u>	- 153 -
§ 7 TOPOLOGISCHE RÄUME UND NACHBARSCHAFTSRÄUME	- 154 -
STUDIERHINWEISE ZU § 7	- 154 -
7.0 EINFÜHRUNG	- 154 -
7.1 TOPOLOGISCHE RÄUME	- 155 -
7.2 NACHBARSCHAFTSRÄUME	- 162 -
7.3 NACHBARSCHAFTEN UND TOPOLOGIEN	- 165 -

	Seite
ZEITTAFEL	- 168/169 -
HISTORISCHE ANMERKUNGEN	- 170 -
LITERATURHINWEISE	- 181 -
GLOSSAR	
§ 1	- 183 -
§ 2	- 188 -
§ 3	- 191 -
§ 4	- 194 -
§ 5	- 196 -
§ 6	- 199 -
§ 7	- 201 -
SYMBOLLISTE	- 205 -
INDEX	- 208 -

V O R W O R T

Das vorliegende Buch ist konzipiert als ein Kurs zum Selbststudium der Topologie, versehen mit zahlreichen Studierhinweisen, Beispielen und Aufgaben. Es eignet sich jedoch auch als Begleitmaterial für eine Vorlesung oder ein Seminar.

Inhalt des Kurses ist die elementare Theorie metrischer Räume, die in ihren Grundzügen vollständig dargestellt wird. Somit kann vorliegender Kurs alternativ als abgerundetes Ganzes oder als Einführung in die weniger anschauliche und technisch kompliziertere Theorie der topologischen und uniformen Räume betrachtet werden. Fortsetzungen Topologie I (Topologische Räume) und Topologie II (Uniforme Räume) sind geplant.

Für mannigfache Hilfen danke ich meinen Freunden und Kollegen H.L. Bentley, B. Hoffmann, H. Lenz, H. Müller, D. Pumplün, W. Tholen und insbesondere meinen Mitarbeitern H. Bargenda und C. Trompelt, für das kompetente Anfertigen des Manuskripts meiner Sekretärin Frau Gabriele Engel.

Horst Herrlich

ALLGEMEINE STUDIERHINWEISE

Im vorliegenden Buch erhalten Sie eine Einführung in die Theorie metrischer Räume.

Ziel des Buches ist es, Ihre Kenntnisse über grundlegende Begriffe und Ergebnisse der Analysis zu vertiefen, sie mit zentralen topologischen Fragestellungen und Methoden vertraut zu machen und Sie auf die Untersuchung komplizierter Räume in weiterführenden Büchern (u.a. Topologie, Funktionalanalysis) vorzubereiten.

ALLGEMEINE EMPFEHLUNGEN

- (1) Versuchen Sie stets, neu eingeführte Begriffe nicht nur formal zu verstehen, sondern sich von ihnen eine möglichst klare (wenn immer möglich, anschaulich-geometrische) Vorstellung zu verschaffen. Sie können dieses am besten erreichen durch das Studium möglichst vieler konkreter Beispiele in dem Ihnen durch vorangegangene Vorlesungen (z.B. Analysis) oder vorangegangene Teile dieses Buches bereits vertraut gewordenen Rahmen. Scheuen Sie sich dabei nicht, möglichst viele Figuren zu malen. Der zweidimensionale Euklidische Raum $\mathbb{R}^2$ - veranschaulicht durch das Zeichenblatt - ist eine unerschöpfliche Quelle von Einsichten und Veranschaulichungsmöglichkeiten.
- (2) Erliegen Sie nicht der Gefahr, nur rezeptiv zu sein. Versuchen Sie vielmehr, so kreativ wie möglich zu bleiben. Als erster Schritt hierzu sei die sorgfältige Bearbeitung aller Aufgaben empfohlen, als zweiter Schritt der Versuch, alle in diesem Kurs aufgestellten Sätze zunächst selbst zu beweisen. Für manche Aussagen ist das nicht schwer; denn die Beweisideen sollten aus der Analysis bereits bekannt sein. Für andere Aussagen wird es Ihnen vielleicht trotz erheblicher Anstrengung nicht gelingen, selbständig einen Beweis zu finden. Auch der vergebliche Versuch erweist sich jedoch in der Regel als nützlich. Sie werden den im Kurs gelieferten Beweis nämlich meist besser verstehen und sicher besser die Beweisidee behalten. Finden Sie Gefallen an dieser Methode, sollten Sie gelegentlich auch einen dritten oder gar vierten Schritt wagen: das Vermuten und Überprüfen neuer Sätze oder gar das selbständige Entwickeln neuer Begriffe.
- (3) Sind Ihnen gewisse Begriffe oder Bezeichnungsweisen entfallen, so greifen Sie zum Index bzw. zur Symbolliste.