§ 7 Topologische Räume und Nachbarschaftsräume

STUDIERHINWEISE ZU § 7

In den Paragraphen 1 bis 6 des vorliegenden Buches ist die Theorie metrischer Räume entwickelt worden. Der 7. Paragraph stellt einen Ausblick und eine Einführung in die Theorie von topologischen und Nachbarschafts-Räumen dar.

Die bisher vagen Begriffe der topologischen und der uniformen Struktur eines metrischen Raumes erhalten hier eine präzise Fassung.

Die Abschnitte 7.1. und 7.2. dienen der Definition von topologischen Räumen und von Nachbarschaftsräumen. Es wird gezeigt, daß sie geeignete Hilfsmittel zur Präzisierung der Begriffe "topologische Struktur" bzw. "uniforme Struktur" eines metrischen Raumes sind. Andererseits entstehen neue Schwierigkeiten dadurch, daß die beim Studium metrischen Räume so nützlichen Begriffe wie "Konvergenz einer Folge" und "benachbarte Folgen" im allgemeineren Rahmen sich als wenig geeignete Werkzeuge erweisen und durch kompliziertere ersetzt werden müssen. Diese Abschnitte sollten sorgfältig studiert werden.

In Abschnitt 7.3. wird kurz der Zusammenhang zwischen Topologien und Nachbarschaftsstrukturen behandelt. Der Leser soll hier ein Gefühl für die in der mengentheoretischen Topologie üblichen Methoden und Techniken bekommen; sie sicher zu beherrschen wird z.B. durch die Erarbeitung eines weiterführenden Topologie-Buches ermöglicht.

7.0 EINFÜHRUNG

Die Paragraphen 1 bis 6 dieses Buches galten dem Studium metrischer Räume. Eine Fülle interessanter und wichtiger Sätze wurde hergleitet. Viele Ergebnisse der Analysis erwiesen sich als Spezialfälle erheblich allgemeinerer Resultate über metrische Räume, was besonders diejenigen schätzen werden, die sich später z.B. im Rahmen der Funktionalanalysis noch eingehend mit speziellen metrischen Räumen, z.B. normierten Vektorräumen, Banachräumen und Hilberträumen, beschäftigen werden.

Andererseits hat insbesondere der Paragraph 6 die Grenzen der Brauchbarkeit des Metrik-Begriffs aufgezeigt. Das sehr natürliche und für die Analysis wichtige Konzept der einfachen Konvergenz von Funktionenfolgen läßt sich, wie wir in 6.6.1 sahen, (im Gegensatz zum Konzept der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen) nicht mit einer Metrik beschreiben. Die in den §§ 1 - 6 entwickelten Methoden und Ergebnisse sind somit zum Studium der einfachen Konvergenz nicht geeignet. Bereits vorher (insbesondere beim Studium der Funktionenräume $\underline{X^n}$ und $\underline{X^{\mathbb{N}}}$) wurde deutlich, daß Metriken i.allg. nur Hilfsmittel sind, um topologische oder uniforme Begriffe zu definieren. Die Tatsache, daß i.allg. sehr viele verschiedene Metriken dieselben topologischen bzw. uniformen Begriffe erzeugen (d.h. topologisch bzw. uniform äquivalent sind) wird der Leser insbesondere in 6.1.2 und 6.2.3 wohl eher als

verwirrend denn als erhellend betrachtet haben. Es wäre in diesen Fällen viel natürlicher gewesen, direkt (d.h. ohne Zuhilfenahme einer weitgehend willkürlich gewählten Metrik) in geeigneter Form eine allgemeinere Struktur auf den Mengen X^n und $X^{\mathbb{N}}$ einzuführen, die aber ausreicht, alle topologischen bzw. uniformen Begriffe zu definieren. Dazu wäre es natürlich nötig gewesen, vorher zu definieren, was eine solche Struktur ist. Das soll in diesem Paragraphen kurz nachgeholt werden. Eine sorgfältige Darstellung dieser Strukturen muß allerdings einem weiterführenden Topologie-Buch vorbehalten bleiben.

Topologische Strukturen, sog. Topologien, werden wir in 7.1. mit Hilfe des Operators cl einführen und kurz andeuten, wie die topologischen Begriffe aus §1 sich in dem verallgemeinerten Konzept der (symmetrischen) topologischen Räume wiederfinden. Uniforme Begriffe wie gleichmäßige Stetigkeit werden wir in 7.2. mit Hilfe von sogenannten Nachbarschaftsräumen einführen, deren Struktur sich durch Axiomatisierung der Relation "A ist benachbart zu B" ergibt. Schließlich zeigen wir in 7.3., daß das Konzept der Nachbarschaftsräume komplexer ist als dasjenige der symmetrischen topologischen Räume: Jede Nachbarschaftsstruktur induziert eine symmetrische Topologie und jede symmetrische Topologie kommt so zustande, aber verschiedene Nachbarschaftsstrukturen können dieselbe Topologie induzieren.

Eine Durchsicht der Hauptergebnisse dieses Kurses wird zeigen, daß in keinem (mit der einzigen Ausnahme des Banachschen Fixpunktsatzes) die Metrik explizit vorkommt. Jedes dieser Ergebnisse läßt sich somit in der Theorie der topologischen Räume oder der Nachbarschaftsräume formulieren. Bei den Beweisen haben wir jedoch z.T. sehr kräftig von der Metrik Gebrauch gemacht (analysieren Sie z.B. den Beweis des Fortsetzbarkeitstheorems 2.3.5). Viele dieser Ergebnisse sind somit in allgemeinerem Rahnen zwar formulierbar, aber nicht oder nur unter zusätzlichen einschränkenden Voraussetzungen gültig und im Gültigkeitsfall oft nur unter Heranziehung erheblich komplizierter Techniken beweisbar.

7.1 TOPOLOGISCHE RÄUME

7.1.1 DEFINITIONEN

(1) Eine *Topologie* auf einer Menge X ist eine Abbildung cl, die jeder Teilmenge A von X eine Teilmenge cl A von X so zuordnet, daß folgende Axiome erfüllt sind:

(T1) $\mathrm{cl}\,\emptyset = \emptyset$,

(T2) $A \subset \mathrm{cl}\, A$,

(T3) $\mathrm{cl}(A \cup B) = \mathrm{cl}\, A \cup \mathrm{cl}\, B$,

(T4) $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}\, A) = \mathrm{cl}\, A$.

Für jedes $A \subset X$ heißt $\mathrm{cl}\, A$ die *abgeschlossene Hülle* von A in (X,cl).

(2) Eine Topologie cl auf X heißt *symmetrisch*, falls für $x \in X$, $y \in X$ aus $x \in \mathrm{cl}\{y\}$ stets $y \in \mathrm{cl}\{x\}$ folgt.

(3) Ist cl eine (symmetrische) Topologie auf X, so heißt (X,cl) ein *(symmetrischer) topologischer Raum*.

(4) Eine Abbildung $f: (X,\mathrm{cl}) \to (X',\mathrm{cl}')$ zwischen topologischen Räumen heißt *stetig*, falls aus $A \subset X$ stets $f[\mathrm{cl}\, A] \subset \mathrm{cl}'(f[A])$ folgt.

7.1.2 SATZ UND DEFINITION

(1) *Ist (X,d) ein metrischer Raum, so ist die Abbildung cl_d, die jeder Teilmenge A von X ihre abgeschlossene Hülle in (X,d) zuordnet, eine symmetrische Topologie auf X. Sie heißt die durch die Metrik d induzierte Topologie auf X.*

(2) *Sind (X,d) und (X',d') metrische Räume und ist $f: X \to X'$ eine Abbildung, so sind äquivalent:*

(a) *$f: (X,d) \to (X',d')$ ist stetig im Sinne von 2.1.3.*

(b) *$f: (X,\mathrm{cl}_d) \to (X',\mathrm{cl}_{d'})$ ist stetig im Sinne von 7.1.1(4)*

(3) *Sind d und d' Metriken auf X, so sind äquivalent:*

(a) *d und d' sind topologisch äquivalent.*

(b) *d und d' induzieren dieselbe Topologie auf X, d.h. $\mathrm{cl}_d = \mathrm{cl}_{d'}$.*

Beweis:

(1) 1.2.11.

(2) 2.1.15(1).

(3) 2.2.6.

7.1.3 BEISPIELE

(1) Auf der Menge $X = \{0,1\}$ gibt es genau 4 verschiedene Topologien:

(i) die durch $\mathrm{cl}\, A = A$ definierte Topologie;

(ii) die durch $\mathrm{cl}\, A = \begin{cases} X, & \text{falls } 0 \in A \\ A & \text{sonst} \end{cases}$ definierte Topologie;

(iii) die durch $\mathrm{cl}\, A = \begin{cases} X, & \text{falls } 1 \in A \\ A & \text{sonst} \end{cases}$ definierte Topologie;

(iv) die durch $\mathrm{cl}\, A = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } A = \emptyset \\ X & \text{sonst} \end{cases}$ definierte Topologie;

für letztere gilt insbesondere $1 \in \mathrm{cl}\{0\}$ und $0 \in \mathrm{cl}\{1\}$.

Die in (i) definierte Topologie cl wird durch die diskrete Metrik d_D auf X induziert, also $cl = cl_{d_D}$. Keine der anderen 3 Topologien auf X wird durch eine Metrik induziert: Die Topologien in (ii) und (iii) sind nicht symmetrisch (für $x \neq y$ gilt $x \in cl\{y\} \iff y \notin cl\{x\}$); die Topologie cl aus (iv) ist zwar symmetrisch, aber weil für jede Metrik d auf $X = \{0,1\}$ und $x \in X$ stets $cl_d\{x\} = \{x\}$ gilt, ist $cl_d \neq cl$.

(2) Wie obiges Beispiel zeigt, gibt es Topologien, die nicht durch eine Metrik induziert werden. Die folgende Tabelle* macht das noch deutlicher:

	Anzahl aller Topologien auf $X = \{1,\ldots,n\}$	Anzahl aller symmetrischen Topologien auf $X = \{1,\ldots,n\}$	Anzahl aller metrikinduzierten Topologien auf $X = \{1,\ldots,n\}$
0	1	1	1
1	1	1	1
2	4	2	1
3	29	5	1
4	355	15	1
5	6 942	52	1
6	2o9 527	2o3	1
7	9 535 341	877	1
8	642 779 354	4 14o	1
9	63 26o 289 423	21 147	1

7.1.4 DEFINITIONEN

Sei (X,cl) ein topologischer Raum, seien $A \subset X$, $x \in X$ und (x_n) eine Folge von X.

(1) x heißt *Berührpunkt* von A in (X,cl), falls $x \in cl\ A$ gilt.

(2) A heißt *abgeschlossen* in (X,cl), falls $A = cl\ A$ gilt.

(3) A heißt *offen* in (X,cl), falls $X \setminus A$ abgeschlossen in (X,cl) ist.

(4) Die Menge $int\ A = X \setminus cl(X \setminus A)$ heißt *offener Kern* von A in (X,cl).

*Aus: Marcel Erné, Struktur- und Anzahlformeln für Topologien auf endlichen Mengen, Manuscripta Math. 11 (1974), S. 221 - 259.

(5) A heißt *Umgebung* von x in (X,cl), falls $x \in \text{int } A$ gilt.
(6) x heißt *Grenzwert* oder *Limes* von (x_n) in (X,cl), falls jede Umgebung von x fast alle Glieder von (x_n) enthält. In diesem Fall sagt man auch, (x_n) *konvergiert* in (X,cl) gegen x und schreibt $(x_n) \to x$.
(7) x heißt *Verdichtungspunkt* von (x_n) in (X,cl), falls jede Umgebung von x unendlich viele Glieder von (x_n) enthält.

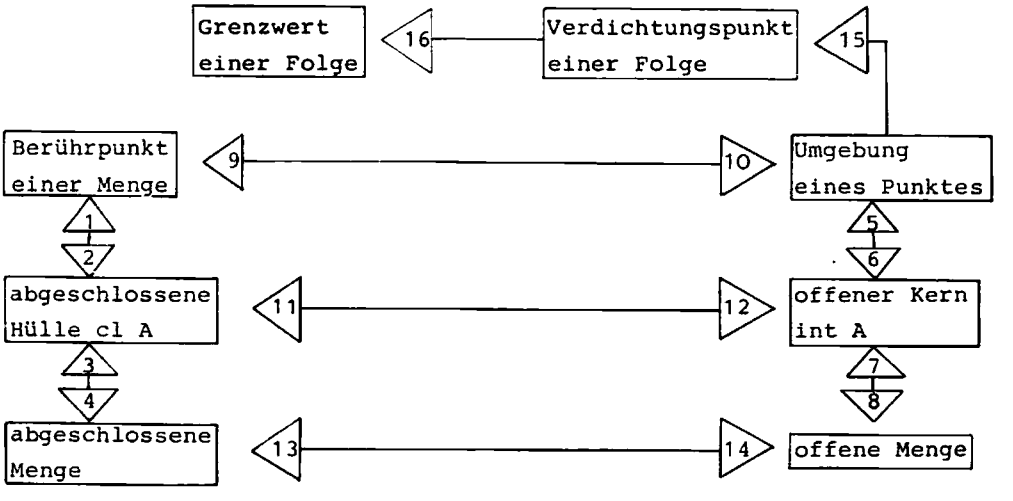
7.1.5 SATZ

Ist (X,d) ein metrischer Raum und ist cl_d die durch d induzierte Topologie auf X, so decken sich die in 7.1.4 bzgl. (X,cl_d) definierten Begriffe jeweils mit den in §1 bzgl. (X,d) definierten gleichlautenden Begriffen.

Beweis:
(1) 1.2.9.
(2) 1.2.12.
(3) 1.2.22.
(4) 1.2.18.
(5) 1.2.25(1).
(6) 1.3.1 und 1.3.6.
(7) 1.3.1.

7.1.6 SATZ

In topologischen Räumen (X,cl) gelten zwischen den in 7.1.4 definierten Begriffen folgende Beziehungen:
(Die Ziffern in den Pfeilen beziehen sich auf die nachfolgende Liste.)



(1) x *Berührpunkt von* A $\Longleftrightarrow$ x $\in$ cl A.

(2) cl A = {x $\in$ X| x ist Berührpunkt von A}.

(3) cl A = $\cap${B $\subset$ X|A $\subset$ B und B ist abgeschlossen}.

(4) A *abgeschlossen* $\Longleftrightarrow$ A = cl A.

(5) A *ist Umgebung von* x $\Longleftrightarrow$ x $\in$ int A.

(6) int A = {x $\in$ X|A ist Umgebung von x}.

(7) int A = $\cup${B $\subset$ X|B $\subset$ A und B ist offen}.

(8) A *offen* $\Longleftrightarrow$ A = int A.

(9) x *Berührpunkt von* A $\Longleftrightarrow$ *jede Umgebung von* x *hat nichtleeren Durchschnitt mit* A.

(10) A *Umgebung von* x $\Longleftrightarrow$ x *kein Berührpunkt von* X\A.

(11) cl A = X\int(X\A).

(12) int A = X\cl(X\A).

(13) A *abgeschlossen* $\Longleftrightarrow$ X\A *offen.*

(14) A *offen* $\Longleftrightarrow$ X\A *abgeschlossen.*

(15) x *Verdichtungspunkt von* (x_n) $\Longleftrightarrow$ *jede Umgebung von* x *enthält unendlich viele Glieder von* (x_n).

(16) x *Grenzwert von* (x_n) $\Longleftrightarrow$ x *Verdichtungspunkt jeder Teilfolge von* (x_n).

Beweis:
(1),(2),(4),(5),(6),(12),(13),(14) und (15) folgen unmittelbar aus 7.1.4. Die Beweise der restlichen Aussagen verlaufen analog wie die Beweise der entsprechenden Ergebnisse über metrische Räume. Exemplarisch führen wir den Beweis zu (16) vor:
"$\Rightarrow$": Jede Umgebung von x enthält fast alle Glieder von (x_n), somit erst recht fast alle Glieder einer beliebigen Teilfolge (x_{n_i}), insbesondere also unendlich viele Glieder (vgl. 1.3.10(1)).

"$\Leftarrow$": Angenommen, es existiert eine Umgebung U von x, die nicht fast alle Glieder von (x_n) enthält, also für die zu jedem i ein $n_i \geq i$ mit $x_{n_i} \notin U$ existiert. Dann ist x sicher nicht Verdichtungspunkt der Teilfolge (x_{n_i}) von (x_n).

7.1.7 BEMERKUNGEN

(1) Wie der Satz 7.1.6 zeigt, bestehen in einem topologischen Raum zwischen den Begriffen Berührpunkt, abgeschlossene Hülle, abgeschlossene Menge, Umgebung, offener Kern und offene Menge enge Beziehungen. Insbesondere ist die Topologie eines topologischen Raumes vollständig durch die Kenntnis eines dieser 6 Begriffe bestimmt. Demgemäß hätten wir bei der Definition der Topologie in 7.1.1 anstelle von cl irgend-

einen anderen dieser 6 Begriffe an den Anfang stellen können, ohne daß die Beziehungen zwischen diesen 6 Begriffen zerstört würden. An die Stelle von (T1) bis (T4) müssen dann natürlich andere, den entsprechenden Begriff vollständig charakterisierende Axiome treten.

Es kann somit nicht überraschen, daß einige Autoren einen anderen dieser Begriffe als Grundbegriff wählen. Meistens wird der Begriff der offenen Menge gewählt, der zwar etwas weniger anschaulich ist, aber gewisse formale Vorteile besitzt. Einige unserer Definitionen in 7.1.4 werden in einem derartigen Aufbau zu Sätzen, einige unserer Ergebnisse in 7.1.6 dafür zu Definitionen. Das in 7.1.6 zum Ausdruck kommende Beziehungsgefüge bleibt jedoch erhalten. (Vgl. unten 7.1.9(2), (3).)

(2) Dem Leser wird aufgefallen sein, daß wir in obigen Erörterungen die beiden Begriffe Grenzwert und Verdichtungspunkt von Folgen ausgespart haben. Ihm wird ferner aufgefallen sein, daß in 7.1.6 keine Pfeile von einem dieser Begriffe zu einem der restlichen 6 Begriffe führen. Der Grund hierfür ist die bedauerliche Tatsache, daß Folgen in der Theorie metrischer Räume zwar ein sehr nützliches Werkzeug sind, in der Theorie topologischer Räume hingegen ein recht unbrauchbares Instrument darstellen. So gilt - wie wir mit folgendem Beispiel belegen werden - u.a. der Satz 1.3.11, welcher besagt, daß x genau dann Berührpunkt von A ist, wenn es eine Folge (a_n) in A gibt, die gegen x konvergiert, für topologische Räume i.a. nicht. So ist es notwendig, für das Studium topologischer Räume ein komplizierteres Werkzeug zu schmieden: den Begriff des Filters bzw. die Begriffe Grenzwert und Verdichtungspunkt von Filtern. Der Filterbegriff spielt in der Theorie der topologischen Räume dieselbe Rolle wie der einfachere und anschaulichere Folgenbegriff in der Theorie metrischer Räume. Bezüglich Definition und Details verweisen wir auf weiterführende Topologie-Lehrbücher.

7.1.8 BEISPIELE

(1) Sei X eine beliebige überabzählbare Menge (z.B. $X = \mathbb{R}$).

Durch $\mathrm{cl}\, A = A$ bzw. $\mathrm{cl}'A = \begin{cases} A, & \text{falls A höchstens abzählbar ist,} \\ X & \text{sonst} \end{cases}$

werden zwei verschiedene Topologien cl bzw. cl' auf X definiert. Dennoch lassen sich sowohl Verdichtungspunkte als auch Grenzwerte von Folgen bzgl. dieser beiden Topologien nicht unterscheiden, denn es gilt:

(i) Äquivalent sind:
(a) x ist Grenzwert von (x_n) in (X,cl).
(b) x ist Grenzwert von (x_n) in (X,cl').
(c) $\exists m \ \forall n \geq m \ \ x_n = x$.

(ii) Äquivalent sind:
(a) x ist Verdichtungspunkt von (x_n) in (X,cl).
(b) x ist Verdichtungspunkt von (x_n) in (X,cl').
(c) $\forall n \ \exists m \geq n \ \ x_m = x$.

Demnach reicht die Kenntnis aller Grenzwerte und Verdichtungspunkte von Folgen nicht aus, um die Topologie zu erkennen. Ferner hat (X,cl') die unangenehme Eigenschaft, daß für beliebiges $x \in X$ der Punkt x zwar ein Berührpunkt von $A = X \setminus \{x\}$ ist, es aber keine Folge (a_n) in A gibt, die in (X,cl') gegen x konvergiert.

(2) Die Kenntnis aller Grenzwerte von Folgen impliziert i.allg. nicht einmal die Kenntnis aller Verdichtungspunkte von Folgen, wie folgendes Beispiel zeigt. Auf $X = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cup \{\infty\}$ werden durch cl A = A bzw.

$$cl'A = \begin{cases} A & \text{, falls } \{n \in \mathbb{N} \mid A \cap (\{n\} \times \mathbb{N}) \text{ unendlich}\} \text{ endlich,} \\ A \cup \{\infty\} & \text{sonst} \end{cases}$$

zwei verschiedene Topologien cl bzw. cl' definiert. Ist $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung, so hat die Folge (f(n)) keinen Verdichtungspunkt in (X,cl), aber den Verdichtungspunkt ∞ in (X,cl'). Hingegen gilt:
Äquivalent sind:
(a) x ist Grenzwert von (x_n) in (X,cl).
(b) x ist Grenzwert von (x_n) in (X,cl').
(c) $\exists n \ \forall m \geq n \ \ x_m = x$.
Insbesondere gibt es also keine Teilfolge von (f(n)), die in (X,cl') gegen ∞ konvergiert. Der Satz 1.3.2o(3) gilt somit für beliebige topologische Räume ebenfalls nicht.

7.1.9 AUFGABEN

(1) Sei (X,cl) ein topologischer Raum. Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Implikation für Teilmengen A,B von X:

$$A \subset B \ \Rightarrow \ cl\ A \subset cl\ B.$$

(2) Beweisen Sie Satz 1.2.14 (Eigenschaften abgeschlossener Mengen) für einen beliebigen topologischen Raum (X,cl). Entsprechend Satz 1.2.23 (Eigenschaften offener Mengen).

(3) $\mathcal{U}$ sei eine Menge von Teilmengen von X mit folgenden Eigenschaften:

1. $\emptyset \in \mathcal{U}$ und $X \in \mathcal{U}$,
2. $U \in \mathcal{U}$ und $V \in \mathcal{U}$ implizieren $U \cap V \in \mathcal{U}$,
3. $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ impliziert $U\mathcal{B} \in \mathcal{U}$.

Zeigen Sie, daß genau eine Topologie cl auf X existiert mit
$\mathcal{U} = \{U \mid U \subset X$ offen in $(X,cl)\}$.

(4) Zeigen Sie, daß sich die einfache Konvergenz in Funktionenräumen stets mit Hilfe einer geeigneten Topologie beschreiben läßt, d.h.:

Ist (X,cl) ein topologischer Raum und ist Y eine beliebige Menge, so gibt es eine Topologie cl' auf der Menge X^Y aller Abbildungen von X nach Y mit folgender Eigenschaft:
(*) Eine Folge (f_n) in X^Y konvergiert einfach gegen ein $f \in X^Y$ genau dann, wenn (f_n) in (X^Y,cl') gegen f konvergiert.
(Hinweis: Sei A die Menge aller Teilmengen A von X^Y mit folgender Eigenschaft: Konvergiert eine Folge (f_n), die in A liegt, einfach gegen $f \in X^Y$, so ist $f \in A$.
Beweisen Sie, daß
$\mathcal{U} = \{U \subset X^Y \mid X^Y \setminus U \in A\}$
die Eigenschaft 1.-3. aus (3) erfüllt und die so gemäß (3) erzeugte Topologie cl' die Eigenschaft (*) besitzt.)

(5) Zeigen Sie, daß auf IN durch $cl\ A = \begin{cases} A & \text{, falls A endlich} \\ A \cup \{1,2\} & \text{sonst} \end{cases}$
eine Topologie cl definiert wird. Prüfen Sie, ob es eine Metrik d mit $cl_d = cl$ gibt.

7.2 NACHBARSCHAFTSRÄUME

7.2.1 DEFINITION

(1) Eine *Nachbarschaftsstruktur* auf X ist eine Relation δ auf der Menge aller Teilmengen von X, die folgenden Bedingungen genügt:
(N1) $A\delta B \Rightarrow B\delta A$,
(N2) $A\delta B \Rightarrow A \neq \emptyset$,
(N3) $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A\delta B$,
(N4) $A\delta(B \cup C) \iff (A\delta B$ oder $A\delta C)$,
(N5) $A\delta(cl_\delta B) \Rightarrow A\delta B$, wobei $cl_\delta B = \{x \in X \mid \{x\}\delta B\}$.

(2) Ist δ eine Nachbarschaftsstruktur auf X, so heißt (X,δ) ein *Nachbarschaftsraum*. Teilmengen A und B von X heißen *benachbart* in (X,δ), wenn $A\delta B$ gilt.

(3) Eine Abbildung $f: (X,\delta) \to (X',\delta')$ zwischen Nachbarschaftsräumen heißt *gleichmäßig stetig*, wenn aus $A\delta B$ stets $f[A]\delta' f[B]$ folgt.

7.2.2 SATZ UND DEFINITION

(1) *Ist* (X,d) *ein metrischer Raum, so wird durch*

$A\delta(d)B \iff$ A *und* B *sind benachbart in* (X,d)

eine Nachbarschaftsstruktur $\delta(d)$ *auf* X *definiert.* Sie heißt die *durch* d *induzierte Nachbarschaftsstruktur* auf X.

(2) *Sind* (X,d) *und* (X',d') *metrische Räume und ist* f: X → X' *eine Abbildung, so sind äquivalent:*

(a) f: (X,d) → (X',d') *ist gleichmäßig stetig im Sinne von* 2.1.5.

(b) f: $(X,\delta(d)) \to (X',\delta(d'))$ *ist gleichmäßig stetig im Sinne von* 7.2.1(3)

(3) *Sind* d *und* d' *Metriken auf* X, *so sind äquivalent:*

(a) d *und* d' *sind uniform äquivalent.*

(b) d *und* d' *induzieren dieselbe Nachbarschaftsstruktur auf* X, *d.h.* $\delta(d) = \delta(d')$.

Beweis:

(1) 1.2.7 und 1.2.1o.

(2) 2.1.6.

(3) 2.2.5.

7.2.3 DEFINITION

Ist (X,δ) ein Nachbarschaftsraum und sind A und B Teilmengen von X, so heißt B *gleichmäßige Umgebung* von A in (X,δ), wenn $A\delta(X\backslash B)$ nicht gilt.

7.2.4 BEMERKUNGEN

(1) Da $A\ \delta\ B$ genau dann gilt, wenn $X\backslash B$ keine gleichmäßige Umgebung von A in (X,δ) ist, hätte man den Begriff gleichmäßige Umgebung (bei entsprechendem Axiomensystem) ebenfalls als Grundbegriff zur Definition von Nachbarschaftsräumen wählen können.

(2) Ist (X,d) ein metrischer Raum, so ist A gleichmäßige Umgebung von B in (X,d) genau dann, wenn A gleichmäßige Umgebung von B in $(X,\delta(d))$ ist: vgl. 1.2.28(2).

(3) Ebensowenig wie sich das Konzept der Konvergenz von Folgen zur Beschreibung topologischer Räume eignet, eignet sich als Konzept der benachbarten Folgen zur Beschreibung von Nachbarschaftsräumen. Definiert man (z.B. 1.3.18 folgend) zwei Folgen (x_n) und (y_n) eines Nachbarschaftsraumes (X,δ) als benachbart, falls $\{x_n | n \in M\}\ \delta\ \{y_n | n \in M\}$ für jede unendliche Teilmenge M von $\mathbb{N}$ gilt, so gilt i.allg. der Satz 1.3.17 nicht mehr, wie folgendes Beispiel zeigt:

7.2.5 BEISPIEL

Ist X eine überabzählbare Menge, so wird durch $A\ \delta\ B \Longleftrightarrow [(A \cap B \neq \emptyset)$ oder $(A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$ und $A \cup B$ überabzählbar)] eine Nachbarschaftsstruktur δ auf X definiert. Sind A und B nichtleere, disjunkte Teilmengen von X, von denen wenigstens eine überabzählbar ist, so gilt:

(1) $A\ \delta\ B$.

(2) Es gibt keine Folgen (a_n) in A und (b_n) in B, die im Sinne von 7.2.4(3) benachbart in (X,δ) sind.

Ferner gilt: Die durch $A\ \delta'B \Longleftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$ definierte Nachbarschaftsstruktur auf X ist von δ verschieden, aber die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) (x_n) und (y_n) sind in (X,δ) benachbart im Sinne von 7.2.4.

(b) (x_n) und (y_n) sind in (X,δ') benachbart im Sinne von 7.2.4.

(c) $\exists m\ \forall n \geq m\ \ x_n = y_n$.

Somit sind benachbarte Folgen zur Beschreibung und Untersuchung von Nachbarschaftsräumen ungeeignet.

Wir weisen anschließend auf eine spezielle Eigenschaft von Metrik-induzierten Nachbarschaftsstrukturen hin:

7.2.6 DEFINITION

Ein Nachbarschaftsraum (X,δ) heißt *regulär* oder ein *Proximitätsraum*, falls gilt:

Ist B gleichmäßige Umgebung von A in (X,δ), so existiert stets eine Menge C derart, daß B gleichmäßige Umgebung von C und C gleichmäßige Umgebung von A in (X,δ) ist.

7.2.7 SATZ

Ist (X,d) ein metrischer Raum, so ist $(X,\delta(d))$ ein Proximitätsraum.

Beweis:

Ist B gleichmäßige Umgebung von A in $(X,\delta(d))$, so gilt $r = \mathrm{dist}(A,X\backslash B) > 0$. Somit hat $C = \{x \in X \mid \mathrm{dist}(x,A) < \frac{r}{2}\}$ die geforderten Eigenschaften.

7.2.8 AUFGABEN

(1) Zeigen Sie für einen Nachbarschaftsraum (X,δ):

$A\ \delta\ B$ und $A \subset C$, $B \subset D \Rightarrow C\ \delta\ D$.

(2) Zeigen Sie, daß auf jeder Menge X durch $A\ \delta_D B \Longleftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$ eine Nachbarschaftsstruktur δ_D definiert ist. Wird δ_D durch eine Metrik induziert?

(3) Zeigen Sie, daß auf jeder Menge X durch $A\ \delta_I B \iff (A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset)$ eine Nachbarschaftsstruktur δ_I definiert ist. Wird δ_I durch eine Metrik induziert?

(4) (X,δ), (X',δ') seinen Nachbarschaftsräume und $f: X \to X'$ sei eine Abbildung. Zeigen Sie: Gilt $\delta = \delta_D$ (siehe (2)) oder $\delta' = \delta_I$ (siehe (3)), so ist $f: (X,\delta) \to (X',\delta')$ gleichmäßig stetig.

7.3 NACHBARSCHAFTEN UND TOPOLOGIEN

Die Formulierung des Nachbarschaftsaxioms (N5) legt bereits die Gültigkeit des folgenden Satzes nahe:

7.3.1 SATZ UND DEFINITION

(1) *Ist* (X,δ) *ein Nachbarschaftsraum, so wird durch*

$$cl_\delta B = \{x \in X \mid \{x\}\ \delta\ B\}$$

eine symmetrische Topologie auf X *definiert. Sie heißt die durch* δ *induzierte Topologie auf* X.

(2) *Wird* δ *durch eine Metrik* d *induziert, so ist* cl_δ *die durch* d *induzierte Topologie* cl_d, *also* $cl_{\delta(d)} = cl_d$.

(3) *Für jede gleichmäßig stetige Abbildung* $f: (X,\delta) \to (X,\delta')$ *ist* $f: (X,cl_\delta) \to (X',cl_{\delta'})$ *stetig.*

Beweis:

(1) (T1) Gäbe es $x \in cl_\delta\emptyset$, so wäre $\{x\}\delta\emptyset$, also $\emptyset\delta\{x\}$ nach (N1), und das widerspricht (N2).

(T2) $x \in A \Rightarrow \{x\} \cap A \neq \emptyset \Rightarrow \{x\}\ \delta\ A$ (nach (N3)) $\Rightarrow x \in cl_\delta A$.

(T3) $x \in cl_\delta(A \cup B) \iff \{x\}\ \delta\ (A \cup B) \iff \{x\}\ \delta\ A$ oder $\{x\}\delta B$ (nach N4) $\iff x \in cl_\delta A \cup cl_\delta B$.

(T4) $x \in cl_\delta(cl_\delta A) \Rightarrow \{x\}\delta cl_\delta A \Rightarrow \{x\}\delta A \Rightarrow x \in cl_\delta A$.

Symmetrie: $x \in cl_\delta\{y\} \Rightarrow \{x\}\delta\{y\} \Rightarrow \{y\}\delta\{x\} \Rightarrow y \in cl_\delta\{x\}$.

(2) $x \in cl_{\delta(d)} A \iff \{x\}\delta(d)A \iff \mathrm{dist}(x,A) = 0 \iff x \in cl_d A$.

(3) $x \in cl_\delta A \Rightarrow \{x\}\delta A \Rightarrow \{f(x)\}\delta' f[A] \Rightarrow f(x) \in cl_{\delta'} f[A]$.

Wir zeigen jetzt, daß jede symmetrische Topologie durch eine Nachbarschaftsstruktur induziert wird.

7.3.2 SATZ UND DEFINITION

(1) *Ist* (X,cl) *ein symmetrischer topologischer Raum, so wird durch*

$A\delta(cl)B \iff clA \cap clB \neq \emptyset$

eine Nachbarschaftsstruktur $\delta(cl)$ *auf* X *definiert. Sie heißt die durch* cl *induzierte Nachbarschaftsstruktur auf* X. *Die durch* $\delta(cl)$ *induzierte Topologie ist* cl, *also* $cl_{\delta(cl)} = cl$.

(2) *Für jeden Nachbarschaftsraum* (X,δ) *ist die Identität*

$id_X: (X,\delta(cl_\delta)) \to (X,\delta)$

gleichmäßig stetig.

(3) *Für einen symmetrischen topologischen Raum* (X,cl), *einen Nachbarschaftsraum* (X',δ') *und eine Abbildung* $f: X \to X'$ *sind äquivalent:*

(i) $f: (X,cl) \to (X',cl_{\delta'})$ *ist stetig.*

(ii) $f: (X,\delta(cl)) \to (X',\delta')$ *ist gleichmäßig stetig.*

Beweis:

(1) Sei $\delta = \delta(cl)$. Dann folgt mit (T1) - (T4):

(N1) $A \delta B \iff B \delta A$, da $cl\,A \cap cl\,B = cl\,B \cap cl\,A$.

(N2) $A \delta B \Rightarrow A \neq \emptyset$, da $cl\,\emptyset \cap cl\,B = \emptyset$ für jedes $B \subset X$.

(N3) $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A \delta B$, da $A \cap B \subset cl\,A \cap cl\,B$.

(N4) $A \delta (B \cup C) \iff (A \delta B$ oder $A \delta C)$, da

$cl\,A \cap cl\,(B \cup C) = cl\,A \cap (cl\,B \cup cl\,C)$

$= (cl\,A \cap cl\,B) \cup (cl\,A \cap cl\,C)$.

(N5) Zunächst gilt: $x \in cl_\delta B \iff \{x\} \delta B \iff cl\{x\} \cap cl\,B \neq \emptyset \iff x \in cl\,B$ wegen der Symmetrie von cl (denn aus $y \in cl\{x\} \cap cl\,B$ folgt $x \in cl\{y\} \subset cl(cl\,B) = cl\,B$). Somit gilt $cl_\delta = cl$. Jetzt folgt $A\delta(cl_\delta B) \Rightarrow A \delta B$, da $cl(cl_\delta B) = cl(cl\,B) = cl\,B$.

(2) $A\delta(cl_\delta)B \Rightarrow cl_\delta A \cap cl_\delta B \neq \emptyset \Rightarrow (cl_\delta A)\ \delta\ (cl_\delta B)$ (nach (N3))

$\Rightarrow A \delta B$ (nach zweimaliger Anwendung von (N5)).

(3) (i) $\Rightarrow$ (ii): $A\delta(cl)B \Rightarrow cl\,A \cap cl\,B \neq \emptyset \Rightarrow$

$\emptyset \neq f[cl\,A \cap cl\,B] \subset f[cl\,A] \cap f[cl\,B] \subset cl_\delta f[A] \cap cl_\delta f[B]$

$\Rightarrow f[A]\delta' f[B]$ (wie in (2)).

(ii) $\Rightarrow$ (i): $f: (X,\delta(cl)) \to (X',\delta')$ gleichmäßig stetig

$\Rightarrow f: (X,cl) = (X,cl_{\delta(cl)}) \to (X', cl_{\delta'})$ stetig nach 7.3.1(3).

7.3.3 BEMERKUNGEN

(1) Für eine Nachbarschaftsstruktur δ auf X ist i.allg. $\delta(cl_\delta) \neq \delta$, selbst wenn δ durch eine Metrik d auf X induziert wird, also $\delta(cl_d) \neq \delta(d)$: In 1.2.6 haben wir zwei Teilmengen A,B des metrischen Raumes $\underline{\mathbb{R}^2}$ angegeben mit $A\delta(d)B$, aber $cl_dA \cap cl_dB = \emptyset$, d.h. nicht $A\delta(cl_d)B$.

(2) Nach 7.3.2(1) können wir jeden symmetrischen topologischen Raum

als Nachbarschaftsraum auffassen, ohne dabei an topologischer Information zu verlieren. Faßt man hingegen einen Nachbarschaftsraum als topologischen Raum auf, so verliert man - wie soeben gesehen - an Information.

7.3.4 AUFGABEN

(1) Geben Sie ein Beispiel einer Nachbarschaftsstruktur auf einer Menge an, die nicht durch eine symmetrische Topologie induziert werden kann.

(2) Konstruieren Sie zwei verschiedene Nachbarschaftsstrukturen δ und δ' auf $\mathbb{N}$, die dieselbe Topologie induzieren.

(3) Zeigen Sie, daß die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind für jeden Nachbarschaftsraum (X,δ) und $x \in A \subset X$:
(i) A ist gleichmäßige Umgebung von $\{x\}$ in (X,δ).
(ii) A ist Umgebung von x in (X,cl_δ).

(4) Zeigen Sie, daß die durch die Nachbarschaftsstruktur δ aus 7.2.5 induzierte Topologie mit der in 7.1.8(1) definierten Topologie cl' übereinstimmt.

(5) Für jede stetige Abbildung $f: (X,cl) \to (X',cl')$ symmetrischer topologischer Räume ist $f: (X,\delta(cl)) \to (X',\delta(cl'))$ gleichmäßig stetig.