

§ 6 FUNKTIONENRÄUME

STUDIERHINWEISE ZU § 6

Der § 6 enthält einige der Hauptergebnisse des Kurses. Er dient

- (1) dem Studium von Metriken auf Funktionenmengen, welche die gleichmäßige bzw. die einfache Konvergenz von Funktionenfolgen beschreiben.
- (2) der Konstruktion der wichtigen Räume $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und $\mathbb{H} = [0,1]^{\mathbb{N}}$,
- (3) der Strukturanalyse gewisser Klassen metrischer Räume, z.B. wird gezeigt, daß die kompakten Räume (bis auf uniforme Isomorphie) genau die abgeschlossenen Teilräume von $\mathbb{H}$ sind.

Abschnitt 6.1 dient dem Studium von Metriken auf X^n , Abschnitt 6.2 dem von Metriken auf $X^{\mathbb{N}}$. Diese beiden Abschnitte sind so angeordnet, daß Analogien in Problemstellung und Methodik offensichtlich werden. Ein sorgfältiges Studium von 6.1 erleichtert das Verständnis von 6.2 erheblich. Dem Leser wird auffallen, daß es weder auf X^n noch auf $X^{\mathbb{N}}$ eine besonders ausgezeichnete Metrik gibt, welche die einfache Konvergenz beschreibt. Sowohl im Falle X^n als auch im Falle $X^{\mathbb{N}}$ gibt es deren unendlich viele (6.1.2, 6.2.3). Der Leser sollte sich hierdurch nicht verwirren lassen, sondern vielmehr die Erkenntnis gewinnen, daß Metriken nur Hilfsmittel sind, deren man sich bedienen kann, um "uniforme Strukturen" bzw. "topologische Strukturen" zu definieren. Hierauf werden wir im 7. Paragraphen, der einen Ausblick darstellt, noch näher eingehen.

Die Abschnitte 6.3 und 6.4 dienen dem Studium der Räume $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und $\mathbb{H} = [0,1]^{\mathbb{N}}$. Es zeigt sich, daß viele Klassen metrischer Räume durch Anwendung sehr einfacher Konstruktionsverfahren aus diesen beiden Räumen gewonnen werden können. Dadurch gewinnen wir erhebliche Einsichten in die Struktur gewisser metrischer Räume. In die - durch die metrischen Axiome definierte - zunächst unüberschaubare Vielfalt metrischer Räume ist eine gewisse Ordnung eingetreten. Diese Einsicht sollte als eines der wesentlichen Ergebnisse des vorliegenden Kurses betrachtet werden. Die Beweise der Struktursätze sind nach unseren sorgfältigen Vorbereitungen durchweg einfach. Der Abschnitt 6.5 dient der Untersuchung von $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Er kann überschlagen werden. In 6.6 werden die Sätze von Arzela-Ascoli und von Weierstraß-Stone bewiesen, die in der Funktionalanalysis vielfach Anwendung finden.

Schließlich zeigen wir in 6.7, daß es keine Metrik auf $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ gibt, welche die einfache Konvergenz in $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ beschreibt. Haben uns die Krücken der Metrik bis hierher getragen, so sind wir jetzt endgültig gezwungen, sie wegzuerwerfen und uns direkt dem Studium uniformer und topologischer Strukturen zuzuwenden. Damit diese Strukturen, deren Studium einem besonderen Topologiekurs vorbehalten sein muß, nicht allzu geheimnisvoll bleiben, sollen sie im 7. Paragraphen zumindest definiert werden.

Schließlich noch eine naheliegende Frage: Wäre es nicht sinnvoller gewesen, gleich uniforme bzw. topologische Strukturen zu studieren und auf metrische Räume ganz zu verzichten?

Die Antwort lautet nein. Die Gründe sind folgende:

- (1) Ohne Hilfsmittel geht es nicht. Hätten wir auf den Begriff der Metrik verzichtet, so hätten wir erheblich kompliziertere und z.T. weit aus weniger anschauliche Hilfsmittel (Filter, Überdeckungen, Zerlegungen etc.) entwickeln müssen, um die Ergebnisse dieses Kurses beweisen und z.T. sogar überhaupt erst formulieren zu können.

(2) Eine Motivation für das Studium der erheblich abstrakteren uniformen und topologischen Strukturen kann nur gegeben werden, wenn man - den historischen Prozeß nachvollziehend - die Nachteile und Grenzen von viel anschaulicheren und naheliegenderen Begriffsbildungen (wie den Begriff der Metrik oder den der Konvergenz einer Folge) aufzeigt.

6.0 EINFÜHRUNG

Dieser Paragraph enthält einige zentrale Ergebnisse des vorliegenden Buches. Bereits im ersten Paragraphen haben wir mehrere wichtige Beispiele metrischer Räume bereitgestellt, insbesondere die Räume $\mathbb{R}^n$ und deren Teilräume. Ebenfalls im ersten Paragraphen haben wir gezeigt, daß der aus der Analysis bekannte wichtige Begriff des Grenzwerts einer Folge in beliebigen metrischen Räumen definiert und analysiert werden kann. Aus der Analysis ist weiterhin bekannt, daß man für jede Teilmenge Y von $\mathbb{R}$ auf der Menge $\text{Abb}(Y, \mathbb{R})$ aller Abbildungen von Y nach $\mathbb{R}$ zwei nützliche Konvergenzbegriffe einführen kann: den der einfachen (oder punktweisen) Konvergenz und den der gleichmäßigen Konvergenz. In naheliegender Weise lassen sich diese beiden Konvergenzbegriffe für beliebige Mengen Y und beliebige metrische Räume $\underline{X}$ folgendermaßen definieren:

6.0.1 DEFINITION

Eine Folge (f_n) von Abbildungen $f_n: Y \rightarrow \underline{X}$ konvergiert einfach gegen eine Abbildung $f: Y \rightarrow \underline{X}$ (in Zeichen: $(f_n) \xrightarrow{e} f$), falls gilt:
 $\forall y \in Y \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists n \quad \forall m \geq n \quad d(f_m(y), f(y)) < \epsilon$, d.h. falls für jedes $y \in Y$ die Folge $(f_n(y))$ in $\underline{X}$ gegen $f(y)$ konvergiert.

6.0.2 DEFINITION

Eine Folge (f_n) von Abbildungen $f_n: Y \rightarrow \underline{X}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Abbildung $f: Y \rightarrow \underline{X}$ (in Zeichen: $(f_n) \xrightarrow{g1} f$), falls gilt:
 $\forall \epsilon > 0 \quad \exists n \quad \forall m \geq n \quad \forall y \in Y \quad d(f_m(y), f(y)) < \epsilon$.

Die Frage liegt nahe, ob sich obige Konvergenzarten durch Metriken beschreiben lassen, d.h. ob für jede Menge Y und jeden metrischen Raum $\underline{X}$ auf der Menge $\text{Abb}(Y, X)$ aller Abbildungen von Y nach X Metriken d_e und d_{g1} so existieren, daß eine Folge (f_n) in $\text{Abb}(Y, X)$ genau dann einfach (bzw. gleichmäßig) gegen f konvergiert, wenn sie bzgl. der Metrik d_e (bzw. d_{g1}) gegen f konvergiert. Diese Frage hat im Fall der gleichmäßigen Konvergenz eine einfache positive Lösung. Ist $\underline{X} = (X, d)$ beschränkt, so wird durch $d_{g1}(f, g) = \sup\{d(f(y), g(y)) \mid y \in Y\}$ eine Metrik d_{g1} auf $\text{Abb}(Y, X)$ mit den gewünschten Eigenschaften definiert. Ist $\underline{X} = (X, d)$ unbeschränkt, so kann man zunächst d durch eine uniform

äquivalente, beschränkte Metrik d' auf X ersetzen (z.B. durch $d'(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$) und dann d_{g1} wie oben mit Hilfe von d' definieren. Im Falle der einfachen Konvergenz ist das Problem schwieriger und interessanter. Wir werden es in 3 Schritten analysieren. Im 1. Schritt werden wir Y als endlich voraussetzen. Da für $Y = \{1, \dots, n\}$ die Menge $\text{Abb}(Y, X)$ in naheliegender Weise mit der Menge X^n aller n -Tupel $(x_1, \dots, x_n)$ aus X identifiziert werden kann, gilt es, geeignete Metriken auf X^n zu finden. Dieses Problem erweist sich als lösbar. Die aus der Analysis bekannten Sätze über $\mathbb{R}^n$ erweisen sich als Spezialfälle allgemeinerer Resultate. Im 2. Schritt werden wir Y als abzählbar unendlich voraussetzen. Der Einfachheit halber wählen wir $Y = \mathbb{N}$, d.h. $\text{Abb}(Y, X) = X^{\mathbb{N}}$ ist nichts anderes als die Menge aller Folgen in X . Auch in diesem Fall gelingt es uns, geeignete Metriken auf $X^{\mathbb{N}}$ zu finden. Die so gewonnenen Räume $X^{\mathbb{N}}$ haben eine Reihe merkwürdiger und äußerst interessanter Eigenschaften, z.B. sind für jedes X die Räume $Y = X^{\mathbb{N}}$, $Y^{\mathbb{N}}$ und $Y^{\mathbb{N}}$ paarweise uniform isomorph. Darüber hinaus werden sie unsere Einsichten in die Struktur metrischer Räume wesentlich vertiefen. Einige der Hauptergebnisse sind:

- (1) $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ist uniform isomorph zum Cantorschen Diskontinuum $\mathbb{D}$.
- (2) Ein metrischer Raum ist genau dann kompakt und total-unzusammenhängend, wenn er topologisch isomorph zu einem abgeschlossenen Teilraum von $\mathbb{D}$ ist.
- (3) Jede stetige Abbildung von einem abgeschlossenen Teilraum eines kompakten, total-unzusammenhängenden Raumes X in einen nicht-leeren metrischen Raum läßt sich stetig auf X fortsetzen.
- (4) Für einen metrischen Raum X sind folgende Bedingungen äquivalent:
 - (a) X ist kompakt.
 - (b) X ist stetiges Bild von $\mathbb{D}$ oder leer.
 - (c) X ist zu einem abgeschlossenen Teilraum von $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ topologisch isomorph.
- (5) Ein metrischer Raum ist genau dann total beschränkt, wenn er zu einem Teilraum von $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ uniform isomorph ist.

Weiterhin gilt:

- (6) Ein metrischer Raum ist genau dann separabel, wenn er zu einem Teilraum von $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ topologisch isomorph ist.
- (7) $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ und $\mathbb{P}$ sind topologisch isomorph.

Im 3. Schritt werden wir Y als überabzählbar voraussetzen. Hier erweist sich das Problem i. allg. als unlösbar. Insbesondere werden wir

zeigen, daß es keine Metrik auf $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gibt, welche die einfache Konvergenz beschreibt. Damit erweist sich der Begriff des metrischen Raumes (obwohl äußerst nützlich, wie wir gesehen haben) als zu eng, um einen Rahmen für die Behandlung aller sinnvollen Arten von Konvergenz zu liefern. Im nächsten Paragraphen werden wir Lösungen dieses Problems diskutieren.

6.1 DIE METRISCHEN RÄUME X^n

6.1.1 DEFINITION

Für einen metrischen Raum $X = (X, d)$ und eine natürliche Zahl n bezeichne $X^n = (X^n, d_n)$ den metrischen Raum mit der Trägermenge X^n und der durch $d_n((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max\{d(x_1, y_1), \dots, d(x_n, y_n)\}$ definierten Metrik d_n .

6.1.2 SATZ

Ist $X = (X, d)$ ein metrischer Raum und $(r_1, \dots, r_n)$ ein n -Tupel positiver reeller Zahlen, so sind die folgenden Metriken $d^1, \dots, d^5$ auf X^n zu d_n uniform äquivalent:

$$(1) \quad d^1((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^n d(x_i, y_i),$$

$$(2) \quad d^2((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (d(x_i, y_i))^2},$$

$$(3) \quad d^3((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max\{r_1 d(x_1, y_1), \dots, r_n d(x_n, y_n)\},$$

$$(4) \quad d^4((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sum_{i=1}^n r_i d(x_i, y_i),$$

$$(5) \quad d^5((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (r_i d(x_i, y_i))^2}.$$

Beweis:

Sei $x = (x_1, \dots, x_n)$ und $y = (y_1, \dots, y_n)$. Die uniforme Äquivalenz von d_n, d^1 und d^2 folgt wegen 2.2.8 (vgl. 2.2.9(6)) aus $d_n(x, y) \leq d^2(x, y) \leq d^1(x, y) \leq n \cdot d_n(x, y) \leq n \cdot d^2(x, y)$. Sei $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$ und $r' = \max\{r_1, \dots, r_n\}$. Die uniforme Äquivalenz von d_n, d^3, d^4 und d^5 folgt wegen 2.2.8 aus $r \cdot d_n(x, y) \leq d^3(x, y) \leq d^5(x, y) \leq d^4(x, y) \leq n \cdot r' \cdot d_n(x, y)$.

6.1.3 BEMERKUNG

Ist $X = \mathbb{R}$, so ist der in 6.1.1 definierte Raum $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, d_n)$ nicht identisch mit dem in 1.1.2(3) definierten Raum $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, d_E)$. Die Me-

triken d_n und $d_E = d^2$ sind nach 6.1.2 jedoch uniform äquivalent, ihr Unterschied ist also völlig unerheblich. Insbesondere spielt es im gesamten Kurs keine Rolle, welchen der beiden Räume wir als den $\mathbb{R}^n$ ansehen. Ebenso gut hätten wir irgendeine andere der vielen zu d_E uniform äquivalenten Metriken auf der Menge $\mathbb{R}^n$ wählen können. Weil es geometrisch anschaulicher ist, haben wir im ersten Paragraphen d_E gewählt, weil es rechnerisch einfacher ist, haben wir in diesem Paragraphen d_n gewählt.

6.1.4 SATZ

Sind $(x_m) = ((x_1^m, \dots, x_n^m))$ und $(y_m) = ((y_1^m, \dots, y_n^m))$ Folgen in X^n , so sind äquivalent:

- (a) (x_m) und (y_m) sind benachbart in X^n .
- (b) Für jedes $i = 1, \dots, n$ sind die Folgen (x_i^m) und (y_i^m) benachbart in X .

Beweis:

Wegen $d_n(x_m, y_m) = \max\{d(x_i^m, y_i^m) \mid i = 1, \dots, n\}$ gilt $\lim_{m \rightarrow \infty} d_n(x_m, y_m) = 0$

genau dann, wenn $\lim_{m \rightarrow \infty} d(x_i^m, y_i^m) = 0$ für jedes $i = 1, \dots, n$ gilt. Also

sind (a) und (b) äquivalent.

6.1.5 SATZ

Ist $(x_m) = ((x_1^m, \dots, x_n^m))$ eine Folge in X^n und ist $x = (x_1, \dots, x_n)$ ein Element von X^n , so sind äquivalent:

- (a) (x_m) konvergiert in X^n gegen x .
- (b) Für jedes $i = 1, \dots, n$ konvergiert die Folge (x_i^m) in X gegen x_i .

Beweis:

Die Behauptung folgt wegen 1.3.13 unmittelbar aus 6.1.4.

6.1.6 BEMERKUNG

Aus obigen Sätzen folgt unmittelbar:

(1) Die Metrik d_n (sowie jede der Metriken $d^1, \dots, d^5$ von 6.1.2) beschreibt die einfache Konvergenz in X^n (also in der Funktionenmenge $\text{Abb}(\{1, \dots, n\}, X)$), d.h. eine Folge in X^n konvergiert genau dann, wenn sie komponentenweise konvergiert.

(2) Sind d und d' topologisch (bzw. uniform) äquivalente Metriken auf X , so sind d_n und d'_n nach 6.1.5 und 2.2.6 (bzw. 6.1.4 und 2.2.5) topologisch (bzw. uniform) äquivalent.

6.1.7 SATZ

- (1) $\underline{X}$ und $\underline{X}^1$ sind metrisch isomorph.
(2) Für jedes $n \leq m$ wird durch $(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ eine gleichmäßig stetige Abbildung $p_n^m: \underline{X}^m \rightarrow \underline{X}^n$ von $\underline{X}^m$ auf $\underline{X}^n$ definiert.
(3) Für jedes $n \leq m$ und für jedes feste $x \in \underline{X}$ wird durch $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, \underbrace{x, \dots, x}_{(m-n)\text{mal}})$ ein uniformer Isomorphismus von $\underline{X}^n$ auf einen abgeschlossenen Teilraum von $\underline{X}^m$ definiert.

Beweis:

Trivial.

Als nächstes wollen wir zeigen, daß die Konstruktion von $\underline{X}^n$ so schön ist, daß sie nur wenige topologische oder uniforme Eigenschaften von $\underline{X}$ "zerstört". Darüber hinaus gilt für fast alle von uns untersuchten topologischen oder uniformen Eigenschaften E die folgende Äquivalenz: Ein metrischer Raum $\underline{X}$ hat genau dann die Eigenschaft E , wenn $\underline{X}^n$ für jedes n die Eigenschaft E hat.

6.1.8 SATZ

Äquivalent sind für jedes n :

- (a) $\underline{X}$ ist vollständig.
(b) $\underline{X}^n$ ist vollständig.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Ist $(x_m) = ((x_1^m, \dots, x_n^m))$ eine Cauchy-Folge in $\underline{X}^n$, so ist wegen $d(x_1^m, x_1^{m'}) \leq d_n(x_m, x_{m'})$ für jedes $i = 1, \dots, n$ die Folge (x_i^m) eine Cauchy-Folge in $\underline{X}$, konvergiert also gegen ein x_i in $\underline{X}$. Nach 6.1.5 konvergiert (x_m) gegen den Punkt $(x_1, \dots, x_n)$ in $\underline{X}^n$.

(b) $\Rightarrow$ (a) folgt aus 6.1.7(3) und 3.1.10.

6.1.9 SATZ

Äquivalent sind für jedes n :

- (a) $\underline{X}$ ist total beschränkt.
(b) $\underline{X}^n$ ist total beschränkt.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Ist Y ein ϵ -Netz in $\underline{X}$, so ist Y^n ein ϵ -Netz in $\underline{X}^n$.

(b) $\Rightarrow$ (a) folgt aus 6.1.7(3) und 5.1.10(1).

6.1.10 SATZ

Äquivalent sind für jedes n :

- (a) $\underline{X}$ ist kompakt.

(b) $\underline{X}^n$ ist kompakt.

Beweis:

Dies folgt aus der Tatsache, daß ein metrischer Raum genau dann kompakt ist, wenn er vollständig und total beschränkt ist (4.2.2), und aus den beiden vorangegangenen Sätzen.

6.1.11 SATZ

Äquivalent sind für jedes n :

(a) $\underline{X}$ ist topologisch vollständig.

(b) $\underline{X}^n$ ist topologisch vollständig.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Ist $\underline{X}$ topologisch vollständig, so ist $\underline{X}$ nach 3.6.9 ein G_δ -Teilraum eines vollständigen Raumes $\underline{Y}$. Somit ist $\underline{X}^n$ offensichtlich ein G_δ -Teilraum des nach 6.1.8 vollständigen Raumes $\underline{Y}^n$, also nach 3.6.9 selbst topologisch vollständig.

(b) $\Rightarrow$ (a) folgt aus 6.1.7(3) und 3.5.5(1).

6.1.12 SATZ

Äquivalent sind für jedes n :

(a) $\underline{X}$ ist separabel.

(b) $\underline{X}^n$ ist separabel.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Ist Y eine höchstens abzählbare dichte Teilmenge in $\underline{X}$, so ist Y^n eine höchstens abzählbare dichte Teilmenge in $\underline{X}^n$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Ist $Y = \{(y_1^i, \dots, y_n^i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine dichte Teilmenge in $\underline{X}^n$, so ist $\{y_1^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine dichte Teilmenge in $\underline{X}$.

6.1.13 SATZ

Äquivalent sind für jedes n :

(a) $\underline{X}$ ist (uniform) zusammenhängend.

(b) $\underline{X}^n$ ist (uniform) zusammenhängend.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b) folgt für $X = \emptyset$ trivialerweise und für $X \neq \emptyset$ durch Induktion: $\underline{X}^1$ ist metrisch isomorph zu $\underline{X}$ und somit (uniform) zusammenhängend. Sei $\underline{X}^n$ (uniform) zusammenhängend, und sei $x \in X$. Dann ist für jedes $y \in X$ der durch $A_y = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in X^{n+1} \mid x_{n+1} = y\}$ bestimmte Teilraum A_y von $\underline{X}^{n+1}$ metrisch isomorph zu $\underline{X}^n$ und somit (uniform) zusammenhängend. Ferner ist der durch $B = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in X^{n+1} \mid x_1 = \dots = x_n = x\}$ be-

stimmte Teilraum $\underline{B}$ von $\underline{X}^{n+1}$ metrisch isomorph zu $\underline{X}$ und somit (uniform) zusammenhängend. Wegen $(x, \dots, x, y) \in B \cap A_y$ ist der durch $B_y = B \cup A_y$ bestimmte Teilraum B_y von $\underline{X}^{n+1}$ nach 5.1.8 (uniform) zusammenhängend.

Wegen $(x, \dots, x, x) \in \bigcap_{y \in X} B_y$ ist nach 5.1.8 auch der durch $\bigcup_{y \in X} B_y = \underline{X}^{n+1}$ bestimmte Teilraum von $\underline{X}^{n+1}$, d.h. $\underline{X}^{n+1}$ selbst (uniform) zusammenhängend.

(b) $\Rightarrow$ (a): Die durch $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1$ definierte Abbildung $f: \underline{X}^n \rightarrow \underline{X}$ ist gleichmäßig stetig. Somit ist $\underline{X}$ nach 5.1.3 (uniform) zusammenhängend.

6.1.14 SATZ

Äquivalent sind für jedes n :

- (a) $\underline{X}$ ist (uniform) total-unzusammenhängend.
- (b) $\underline{X}^n$ ist (uniform) total-unzusammenhängend.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Für jedes $i = 1, \dots, n$ ist die durch $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \mapsto x_i$ definierte Abbildung $p_i: \underline{X}^n \rightarrow \underline{X}$ gleichmäßig stetig. Für jeden (uniform) zusammenhängenden Teilraum $\underline{Y}$ von $\underline{X}^n$ ist $p_i[\underline{Y}]$ nach 5.1.3 ein (uniform) zusammenhängender Teilraum von $\underline{X}$ und folglich höchstens einelementig. Somit ist $\underline{Y}$ höchstens einelementig.

(b) $\Rightarrow$ (a) folgt aus 6.1.7(3) und 5.2.4.

6.1.15 SATZ

Äquivalent sind für jedes n :

- (a) $\underline{X}$ ist in sich dicht.
- (b) $\underline{X}^n$ ist in sich dicht.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Ist $(x_1, \dots, x_n)$ ein Element von $\underline{X}^n$ und ist $\epsilon > 0$, so gibt es zu jedem $i = 1, \dots, n$ ein y_i in $\underline{X}$ mit $x_i \neq y_i$ und $d(x_i, y_i) < \epsilon$. Somit gilt $(x_1, \dots, x_n) \neq (y_1, \dots, y_n)$ und $d_n((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) < \epsilon$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Ist x ein Element von $\underline{X}$ und ist $\epsilon > 0$, so gibt es ein Element $(y_1, \dots, y_n)$ von $\underline{X}^n$ mit $(x, \dots, x) \neq (y_1, \dots, y_n)$ und $d_n((x, \dots, x), (y_1, \dots, y_n)) < \epsilon$. Somit gibt es ein $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $x \neq y_i$ und $d(x, y_i) < \epsilon$.

6.1.16 AUFGABEN

Zeigen Sie:

(1) $U \subset \underline{X}^n$ ist genau dann Umgebung von $(x_1, \dots, x_n)$ in $\underline{X}^n$, wenn es Umgebungen U_1 von $x_1, \dots, U_n$ von x_n in $\underline{X}$ so gibt, daß $U_1 \times \dots \times U_n \subset U$ gilt.

(2) Sind $A_1, \dots, A_n$ abgeschlossene Teilmengen von $\underline{X}$, so ist $A_1 \times \dots \times A_n$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\underline{X}^n$.

6.1.17 AUFGABEN

Prüfen Sie die Gültigkeit folgender Aussagen:

(1) Zwei Teilmengen A und B von $\underline{X}^n$ sind genau dann benachbart in $\underline{X}^n$, wenn für $i = 1, \dots, n$ die Mengen $p_i[A]$ und $p_i[B]$ in $\underline{X}$ benachbart sind.

(2) x ist genau dann Berührungspunkt von A in $\underline{X}^n$, wenn für $i = 1, \dots, n$ das Element $p_i(x)$ Berührungspunkt von $p_i[A]$ in $\underline{X}$ ist.

6.1.18 AUFGABEN

A und B seien Teilmengen von $\underline{X}$. Zeigen Sie:

$$(1) \text{int}_{\underline{X}^2} (A \times B) = \text{int}_{\underline{X}} A \times \text{int}_{\underline{X}} B.$$

$$(2) \text{cl}_{\underline{X}^2} (A \times B) = \text{cl}_{\underline{X}} A \times \text{cl}_{\underline{X}} B.$$

$$(3) \text{fr}_{\underline{X}^2} (A \times B) = (\text{fr}_{\underline{X}} A \times \text{cl}_{\underline{X}} B) \cup (\text{cl}_{\underline{X}} A \times \text{fr}_{\underline{X}} B).$$

(4) Die Diagonale $\Delta_{\underline{X}} = \{(x, x) \mid x \in \underline{X}\}$ ist abgeschlossen in $\underline{X}^2$.

6.1.19 AUFGABEN

Zeigen Sie:

(1) Sind $f_1: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ und $f_2: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ (gleichmäßig) stetig, so ist auch die durch $f(x, x') = (f_1(x), f_2(x'))$ definierte Abbildung $f: \underline{X}^2 \rightarrow \underline{Y}^2$ (gleichmäßig) stetig.

(2) $(\text{Compl } \underline{X})^n$ ist Vervollständigung von $\underline{X}^n$.

(3) Sind $\underline{X}$ und $\underline{Y}$ metrisch (uniform, topologisch) isomorph, so sind auch $\underline{X}^n$ und $\underline{Y}^n$ metrisch (uniform, topologisch) isomorph.

(4) $\underline{\text{ID}}$ und $\underline{\text{ID}}^n$ sind für jedes n uniform isomorph.

6.1.20 AUFGABEN

Sind $\underline{X} = (X, d_X)$ und $\underline{Y} = (Y, d_Y)$ metrische Räume, so wird durch $d((x, y), (x', y')) = \text{Max}\{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\}$ eine Metrik d auf $X \times Y$ definiert. Der metrische Raum $(X \times Y, d)$ wird Produkt von $\underline{X}$ und $\underline{Y}$ genannt und mit $\underline{X} \times \underline{Y}$ bezeichnet. Zeigen Sie:

$$(1) \underline{X}^2 = \underline{X} \times \underline{X}.$$

(2) Eine Folge (x_n, y_n) konvergiert in $\underline{X} \times \underline{Y}$ genau dann gegen (x, y) , wenn (x_n) in $\underline{X}$ gegen x und (y_n) in $\underline{Y}$ gegen y konvergieren.

(3) Gilt $X \neq \emptyset \neq Y$, so ist $\underline{X} \times \underline{Y}$ genau dann (topologisch) vollständig, total beschränkt, kompakt, separabel, (uniform) zusammenhängend bzw. (uniform) total-unzusammenhängend, wenn sowohl $\underline{X}$ als auch $\underline{Y}$ die entsprechende Eigenschaft haben.

(4) Gilt $X \neq \emptyset \neq Y$, so ist $\underline{X} \times \underline{Y}$ genau dann in sich dicht, wenn $\underline{X}$ oder $\underline{Y}$ in sich dicht ist.

(5) Ist $\underline{X}$ ein nicht-leerer, kompakter, total-unzusammenhängender metrischer Raum, so sind $\underline{\mathbb{D}}$ und $\underline{X} \times \underline{\mathbb{D}}$ uniform isomorph.

6.2 DIE METRISCHEN RÄUME $\underline{X}^{\mathbb{N}}$

6.2.1 DEFINITION

Sei $\underline{X} = (X, d)$ ein metrischer Raum mit $\text{diam } X \leq 1$. Durch $d_{\mathbb{N}}((x_n), (y_n)) = \sup \left\{ \frac{d(x_n, y_n)}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ wird eine Metrik $d_{\mathbb{N}}$ auf der Menge $\underline{X}^{\mathbb{N}}$ aller Folgen in X definiert. Der Raum $(\underline{X}^{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}})$ wird mit $\underline{X}^{\mathbb{N}}$ bezeichnet.

6.2.2 BEMERKUNG

Die Bedingung $\text{diam } X \leq 1$ in obiger Definition bedeutet keine wesentliche Einschränkung, da zu jeder Metrik d auf X eine uniform äquivalente Metrik d' (z.B. $d'(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$) mit $\text{diam } (X, d') \leq 1$ existiert. Im folgenden sei deshalb stets vorausgesetzt, daß $\underline{X}$ ein metrischer Raum mit $\text{diam } X \leq 1$ ist.

6.2.3 SATZ

Sind $\underline{X} = (X, d)$ ein metrischer Raum mit $\text{diam } X \leq 1$, (r_n) eine Folge positiver reeller Zahlen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ und (s_n) eine Folge positiver

reeller Zahlen mit $\sum_{n=1}^{\infty} s_n < \infty$, so sind folgende Metriken d^1, d^2, d^3 auf $\underline{X}^{\mathbb{N}}$ zu $d_{\mathbb{N}}$ uniform äquivalent:

$$(1) \quad d^1((x_n), (y_n)) = \sup \{r_n \cdot d(x_n, y_n) \mid n \in \mathbb{N}\},$$

$$(2) \quad d^2((x_n), (y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \cdot d(x_n, y_n),$$

$$(3) \quad d^3((x_n), (y_n)) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (s_n \cdot d(x_n, y_n))^2}.$$

Zwei Folgen $(x_m) = ((x_n^m))$ und $(y_m) = ((y_n^m))$ in $\underline{X}^{\mathbb{N}}$ sind genau dann benachbart, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ die beiden Folgen (x_n^m) und (y_n^m) in $\underline{X}$ benachbart sind.

Beweis:

(1) Zunächst zeigen wir, daß (x_m) und (y_m) in $(\underline{X}^{\mathbb{N}}, d^1)$ genau dann benachbart sind, wenn für alle n die Folgen (x_n^m) und (y_n^m) in $\underline{X}$ benachbart sind. Sind (x_m) und (y_m) in $(\underline{X}^{\mathbb{N}}, d^1)$ benachbart, so gilt

$\lim_{m \rightarrow \infty} d^1(x_m, y_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup\{r_n \cdot d(x_n^m, y_n^m) \mid n \in \mathbb{N}\} = 0$. Somit gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ erst recht $\lim_{m \rightarrow \infty} r_n \cdot d(x_n^m, y_n^m) = 0$, wegen $r_n \neq 0$ also $\lim_{m \rightarrow \infty} d(x_n^m, y_n^m) = 0$. Folglich sind für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Folgen (x_n^m) und (y_n^m) in $\underline{X}$ benachbart. Sind umgekehrt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Folgen (x_n^m) und (y_n^m) in $\underline{X}$ benachbart, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein m_n , so daß aus $m \geq m_n$ stets $d(x_n^m, y_n^m) < \frac{\varepsilon}{r_n}$ folgt. Ferner gibt es ein n_0 , so daß aus $n > n_0$ stets $r_n < \varepsilon$ und somit $r_n \cdot d(x_n^m, y_n^m) \leq r_n < \varepsilon$ folgt. Ist $m_0 = \max\{m_1, \dots, m_{n_0}\}$, so folgt aus $m \geq m_0$ stets $r_n \cdot d(x_n^m, y_n^m) < \varepsilon$ und somit $d^1(x_m, y_m) = \sup\{r_n \cdot d(x_n^m, y_n^m) \mid n \in \mathbb{N}\} \leq \varepsilon$. Also gilt $\lim_{m \rightarrow \infty} d^1(x_m, y_m) = 0$. Die Folgen (x_m) und (y_m) sind damit in $(X^{\mathbb{N}}, d^1)$ benachbart.

(2) Ganz analog zeigt man, daß (x_m) und (y_m) in $(X^{\mathbb{N}}, d^i)$ für $i = 2, 3$ genau dann benachbart sind, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Folgen (x_n^m) und (y_n^m) in $\underline{X}$ benachbart sind. Hieraus folgt nach 2.2.5 die uniforme Äquivalenz der Metriken d^3 , d^2 , d^1 und insbesondere $d_{\mathbb{N}}$.

6.2.4 SATZ

Ist $(x_m) = ((x_n^m))$ eine Folge in $X^{\mathbb{N}}$ und $z = (z_n)$ ein Element von $X^{\mathbb{N}}$, so sind äquivalent:

- (a) (x_m) konvergiert in $X^{\mathbb{N}}$ gegen z .
- (b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ konvergiert die Folge (x_n^m) in $\underline{X}$ gegen z_n (d.h., es liegt koordinatenweise Konvergenz vor).

Beweis:

Die Behauptung folgt wegen 1.3.13 unmittelbar aus 6.2.3.

6.2.5 BEMERKUNG

Aus obigen Sätzen folgt:

(1) Sind d und d' topologisch (bzw. uniform) äquivalente Metriken auf X , so sind $d_{\mathbb{N}}$ und $d'_{\mathbb{N}}$ nach 6.2.4 und 2.2.6 (bzw. 6.2.3 und 2.2.5) topologisch (bzw. uniform) äquivalent.

(2) Die Metrik $d_{\mathbb{N}}$ (ebenso wie jede der Metriken d^1, d^2 und d^3 von 6.2.3) beschreibt die einfache Konvergenz auf der Funktionenmenge $X^{\mathbb{N}} = \text{Abb}(\mathbb{N}, X)$. Wie in 6.0 bemerkt, wird die gleichmäßige Konvergenz in der Funktionenmenge $X^{\mathbb{N}}$ u.a. durch die Metrik $d_s((x_n), (y_n)) = \sup\{d(x_n, y_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschrieben. Wegen $d_{\mathbb{N}}(x, y) \leq d_s(x, y)$ ist die durch $x \mapsto x$ definierte Abbildung $f: (X^{\mathbb{N}}, d_s) \rightarrow (X^{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}})$ gleichmäßig stetig. Hingegen ist $f^{-1}: (X^{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}}) \rightarrow (X^{\mathbb{N}}, d_s)$ nicht stetig, sofern X

wenigstens zwei Punkte enthält. Sind nämlich x und y zwei verschiedene Punkte in X und definiert man $x_n^m = \begin{cases} x & \text{für } n < m \\ y & \text{für } n \geq m \end{cases}$, $x_m = (x_n^m)$ und $x_0 = (x)$, so konvergiert die Folge (x_m) wegen $d_{\mathbb{N}}(x_m, x_0) = \sup\{\frac{1}{n} d(x_n^m, x) \mid n \in \mathbb{N}\} = \frac{1}{m} \cdot d(y, x)$ in $(X^{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}})$ gegen x_0 . Hingegen konvergiert die Folge (x_m) in $(X^{\mathbb{N}}, d_s)$ nicht, sie besitzt nicht einmal eine konvergente Teilfolge; denn aus $m \neq m'$ folgt stets $d_s(x_m, x_{m'}) = \sup\{d(x_n^m, x_n^{m'}) \mid n \in \mathbb{N}\} = d(x, y)$. Somit sind d_s und $d_{\mathbb{N}}$ für mindestens zweielementige X nicht topologisch äquivalent. Wie obige Folge zeigt, ist $(X^{\mathbb{N}}, d_s)$ für mindestens zweielementige X niemals kompakt. Hingegen werden wir sehen, daß $\underline{X^{\mathbb{N}}}$ kompakt ist, sobald $\underline{X}$ kompakt ist.

6.2.6 SATZ

(1) Für jedes n wird durch $(x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ eine gleichmäßig stetige Abbildung von $\underline{X^{\mathbb{N}}}$ auf $\underline{X^n}$ definiert.

(2) Für jedes n und jedes $x \in X$ wird durch

$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x'_m)$ mit $x'_m = \begin{cases} x_m, & \text{falls } m \leq n \\ x, & \text{falls } m > n \end{cases}$ ein uniformer Isomorphismus von $\underline{X^n}$ auf einen abgeschlossenen Teilraum von $\underline{X^{\mathbb{N}}}$ definiert.

Beweis:

Trivial.

6.2.7 SATZ

Ist (f_n) eine Folge von Abbildungen $f_n: \underline{Y} \rightarrow \underline{X}$, so ist die durch $y \mapsto (f_n(y))$ definierte Abbildung $f: \underline{Y} \rightarrow \underline{X^{\mathbb{N}}}$ genau dann (gleichmäßig) stetig, wenn alle $f_n: \underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ (gleichmäßig) stetig sind.

Beweis:

(1) Sei $f: \underline{Y} \rightarrow \underline{X^{\mathbb{N}}}$ (gleichmäßig) stetig. Da für jedes $n \in \mathbb{N}$ die durch $(x_m) \mapsto x_n$ definierte Abbildung $p_n: \underline{X^{\mathbb{N}}} \rightarrow \underline{X}$ gleichmäßig stetig ist, ist auch für jedes $n \in \mathbb{N}$ $f_n = p_n \circ f$ (gleichmäßig) stetig.

(2) Sei jedes $f_n: \underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ gleichmäßig stetig. Sind (y_m) und (y'_m) benachbarte Folgen in $\underline{Y}$, so sind für jedes n die Folgen $(f_n(y_m)) = (f(y_m)_n)$ und $(f_n(y'_m)) = (f(y'_m)_n)$ benachbart in $\underline{X}$. Somit sind nach 6.2.3 die Folgen $(f(y_m))$ und $(f(y'_m))$ benachbart in $\underline{X^{\mathbb{N}}}$. Nach 2.1.6 ist $f: \underline{Y} \rightarrow \underline{X^{\mathbb{N}}}$ gleichmäßig stetig.

(3) Sei jedes $f_n: \underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ stetig. Konvergiert (y_m) in $\underline{Y}$ gegen y , so konvergiert für jedes n die Folge $(f_n(y_m)) = (f(y_m)_n)$ in $\underline{X}$ gegen $f_n(y) = f(y)_n$. Nach 6.2.4 konvergiert $(f(y_m))$ in $\underline{X^{\mathbb{N}}}$ gegen $f(y)$. Nach 2.1.2 ist $f: \underline{Y} \rightarrow \underline{X^{\mathbb{N}}}$ stetig.

6.2.8 SATZ

Äquivalent sind:

- (a) $\underline{X}$ ist vollständig.
- (b) $\underline{X}^{\mathbb{N}}$ ist vollständig.

Beweis:

- (a) $\Rightarrow$ (b): Ist $(x_m) = ((x_n^m))$ eine Cauchy-Folge in $\underline{X}^{\mathbb{N}}$, so ist wegen $d(x_n^m, x_n^{m'}) \leq nd_{\mathbb{N}}(x_m, x_{m'})$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Folge (x_n^m) eine Cauchy-Folge in $\underline{X}$, konvergiert also gegen ein x_n in $\underline{X}$. Nach 6.2.4 konvergiert (x_m) gegen den Punkt $x = (x_n)$ in $\underline{X}^{\mathbb{N}}$.
- (b) $\Rightarrow$ (a) folgt aus 6.2.6(2) und 3.1.10.

6.2.9 SATZ

Äquivalent sind:

- (a) $\underline{X}$ ist total-beschränkt.
- (b) $\underline{X}^{\mathbb{N}}$ ist total-beschränkt.

Beweis:

- (a) $\Rightarrow$ (b): Sei $\epsilon > 0$. Ist Y ein ϵ -Netz in $\underline{X}$, x ein Punkt von X und n eine natürliche Zahl mit $\frac{1}{n} < \epsilon$, so ist $\{(x_m) \in \underline{X}^{\mathbb{N}} \mid x_m \in Y \text{ für } m < n \text{ und } x_m = x \text{ für } m \geq n\}$ ein ϵ -Netz in $\underline{X}^{\mathbb{N}}$.
- (b) $\Rightarrow$ (a) folgt aus 6.2.6(2) und 4.1.10.

6.2.10 SATZ

Äquivalent sind:

- (a) $\underline{X}$ ist kompakt.
- (b) $\underline{X}^{\mathbb{N}}$ ist kompakt.

Beweis:

Dies folgt aus 4.2.2 und den beiden vorangegangenen Sätzen.

6.2.11 SATZ

Äquivalent sind:

- (a) $\underline{X}$ ist topologisch vollständig.
- (b) $\underline{X}^{\mathbb{N}}$ ist topologisch vollständig.

Beweis:

- (a) $\Rightarrow$ (b): Nach 3.6.9 ist $\underline{X}$ ein G_δ -Teilraum eines vollständigen metrischen Raumes $\underline{Y}$. Sei (B_n) eine Folge offener Teilmengen von Y mit $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Für jedes Paar $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ ist die Menge $B_{n,m} = \{(x_i) \in \underline{Y}^{\mathbb{N}} \mid x_n \in B_m\}$ eine offene Teilmenge von $\underline{Y}^{\mathbb{N}}$. Wegen $\bigcap_{n,m=1}^{\infty} B_{n,m} = X^{\mathbb{N}}$ ist $\underline{X}^{\mathbb{N}}$ ein G_δ -Teilraum des nach 6.2.8 vollständigen Raumes $\underline{Y}^{\mathbb{N}}$ und somit nach 3.6.9 selbst topologisch vollständig.

(b) $\Rightarrow$ (a) folgt aus 6.2.6(2) und 3.5.5(1).

6.2.12 SATZ

Äquivalent sind:

(a) $\underline{X}$ ist separabel.

(b) $\underline{X}^{\mathbb{N}}$ ist separabel.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Ist Y eine höchstens abzählbare, dichte Teilmenge von $\underline{X}$, so ist $D = \{(y_n) \in Y^{\mathbb{N}} \mid (y_n) \text{ ist fast konstant}\}$ eine höchstens abzählbare, dichte Teilmenge von $\underline{X}^{\mathbb{N}}$. Beweisen Sie das bitte!

(b) $\Rightarrow$ (a): Ist Y eine höchstens abzählbare, dichte Teilmenge von $\underline{X}^{\mathbb{N}}$ und ist $f: \underline{X}^{\mathbb{N}} \rightarrow \underline{X}$ eine stetige Abbildung von $\underline{X}^{\mathbb{N}}$ auf $\underline{X}$ (vergl. 6.2.6(1)), so ist $f[Y]$ eine höchstens abzählbare, dichte Teilmenge von $\underline{X}$.

6.2.13 SATZ

Äquivalent sind:

(a) $\underline{X}$ ist (uniform) zusammenhängend.

(b) $\underline{X}^{\mathbb{N}}$ ist (uniform) zusammenhängend.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Dies folgt für $X = \emptyset$ trivialerweise. Andernfalls sei $x \in X$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist der durch $A_n = \{(x_m) \in X^{\mathbb{N}} \mid x_m = x \text{ für } m > n\}$ bestimmte Teilraum $\underline{A}_n$ von $\underline{X}^{\mathbb{N}}$ nach 6.2.6(2) zu $\underline{X}^n$ uniform isomorph und somit nach 6.1.13 (uniform) zusammenhängend. Wegen $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_1 \neq \emptyset$ ist nach 5.1.8 der durch $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ bestimmte Teilraum $\underline{A}$ von $\underline{X}^{\mathbb{N}}$ (uniform) zusammenhängend. Da A dicht in $\underline{X}^{\mathbb{N}}$ ist, folgt hieraus nach 5.1.5 der (uniforme) Zusammenhang von $\underline{X}^{\mathbb{N}}$.

(b) $\Rightarrow$ (a) folgt aus 6.2.6(2) und 5.1.3.

6.2.14 SATZ

Äquivalent sind:

(a) $\underline{X}$ ist (uniform) total-unzusammenhängend.

(b) $\underline{X}^{\mathbb{N}}$ ist (uniform) total-unzusammenhängend.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die durch $(x_m) \mapsto x_n$ definierte Abbildung $p_n: \underline{X}^{\mathbb{N}} \rightarrow \underline{X}$ gleichmäßig stetig. Für jeden (uniform) zusammenhängenden Teilraum $\underline{Y}$ von $\underline{X}^{\mathbb{N}}$ ist $p_n[Y]$ nach 5.1.3 ein (uniform) zusammenhängender Teilraum von $\underline{X}$ und somit höchstens einelementig. Daher ist

Y höchstens einelementig.

(b) $\Rightarrow$ (a) folgt aus 6.2.6(2) und 5.2.4.

6.2.15 SATZ

Enthält X wenigstens zwei Elemente, so ist $X^{\mathbb{N}}$ in sich dicht.

Beweis:

Ist (x_n) ein Element von $X^{\mathbb{N}}$ und ε eine positive reelle Zahl, so gibt es ein m mit $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Ist y ein beliebiges Element aus $X \setminus \{x_m\}$ und definiert man $y_n = \begin{cases} x_n & \text{für } n \neq m \\ y & \text{für } n = m \end{cases}$, so gilt $(y_n) \neq (x_n)$ und

$$d_{\mathbb{N}}((x_n), (y_n)) < \varepsilon.$$

6.2.16 THEOREM

Ist $\underline{Y} = X^{\mathbb{N}}$, so gilt:

- (1) $\underline{Y}$ und $\underline{Y}^{\mathbb{N}}$ sind uniform isomorph.
- (2) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind $\underline{Y}$ und $\underline{Y}^n$ uniform isomorph.

Beweis:

(1) Sei $\underline{X} = (X, d)$, $\underline{Y} = (Y, d_{\mathbb{N}})$ und $\underline{Y}^{\mathbb{N}} = (Y^{\mathbb{N}}, d^*)$. Sei $h: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ die Bijektion, definiert durch $h(n, m) = \frac{(n+m-1) \cdot (n+m-2)}{2} + n$ (Cantorsches Diagonalverfahren). Man setze $g := h^{-1}$, $g(i) = (g_1(i), g_2(i))$; dann ist $(r_i) = (\frac{1}{g_1(i) \cdot g_2(i)})$ eine Folge positiver reeller Zahlen

mit $\lim_{i \rightarrow \infty} r_i = 0$. Nach 6.2.3 wird durch $d^1((x_i), (y_i)) =$

$\sup\{r_i \cdot d(x_i, y_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine zu $d_{\mathbb{N}}$ uniform äquivalente Metrik d^1 auf $X^{\mathbb{N}} = Y$ definiert. Ist $y = (y_n)$ ein Element von $Y^{\mathbb{N}}$ mit $y_n =$

$(x_{(n,m)}) \in X^{\mathbb{N}} = Y$, so wird durch $y \mapsto (x_i) \in X^{\mathbb{N}} = Y$ mit $x_i = x_{g(i)}$ ein metrischer Isomorphismus $f: \underline{Y}^{\mathbb{N}} \rightarrow (Y, d^1)$ definiert; denn für beliebige Elemente $y = (y_n) = ((x_{(n,m)}))$ und $y' = (y'_n) = ((x'_{(n,m)}))$ von $Y^{\mathbb{N}}$ gilt:

$$\begin{aligned} d^1(f(y), f(y')) &= d^1((x_i), (x'_i)) = \sup\{r_i d(x_i, x'_i) \mid i \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup\{\frac{1}{g_1(i) \cdot g_2(i)} \cdot d(x_{g(i)}, x'_{g(i)}) \mid i \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup\{\frac{1}{n \cdot m} \cdot d(x_{(n,m)}, x'_{(n,m)}) \mid (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\} \\ &= \sup\{\frac{1}{n} \cdot \sup\{\frac{1}{m} d(x_{(n,m)}, x'_{(n,m)}) \mid m \in \mathbb{N}\} \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup\{\frac{1}{n} \cdot d_{\mathbb{N}}(y_n, y'_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \\ &= d^*(y, y'). \end{aligned}$$

Wegen der uniformen Äquivalenz von d^1 und $d_{\mathbb{N}}$ sind $\underline{Y}^{\mathbb{N}}$ und $\underline{Y}$ uniform isomorph.

(2) Sei $\underline{X} = (X, d)$, $\underline{Y} = (Y, d_{\mathbb{N}})$ und $\underline{Y}^{\mathbb{N}} = (Y^{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}})$. Aus der Mengenlehre ist bekannt, daß eine bijektive Abbildung $h: \{1, \dots, n\} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ existiert (z.B. $h(i, m) = i + (m-1)n$). Ist $g: \mathbb{N} \rightarrow \{1, \dots, n\} \times \mathbb{N}$ die zu h inverse Abbildung mit $g(k) = (g_1(k), g_2(k))$, so ist $(r_m) = (\frac{1}{g_2(m)})$ eine Folge positiver reeller Zahlen mit $\lim_{m \rightarrow \infty} r_m = 0$. Nach 6.2.3 wird durch $d^1((x_n), (y_m)) = \sup\{r_m \cdot d(x_m, y_m) \mid m \in \mathbb{N}\}$ eine zu $d_{\mathbb{N}}$ uniform äquivalente Metrik d^1 auf $X^{\mathbb{N}} = Y$ definiert. Die durch $y = (x_m) \mapsto ((x_m^1), \dots, (x_m^n)) \in Y^{\mathbb{N}}$ mit $x_m^i = x_{h(i, m)}$ definierte Abbildung $f: (Y, d^1) \rightarrow \underline{Y}^{\mathbb{N}}$ ist ein metrischer Isomorphismus; denn für beliebige Elemente $y = (x_m)$ und $y' = (x'_m)$ von Y gilt wegen der Implikation $k = h(i, m) \Rightarrow m = g_2(k)$ stets:

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{N}}(f(y), f(y')) &= \max\{d_{\mathbb{N}}((x_m^i), (x'_m{}^i)) \mid i \in \{1, \dots, n\}\} \\ &= \max\{\sup\{\frac{1}{m} \cdot d(x_{h(i, m)}, x'_{h(i, m)}) \mid m \in \mathbb{N}\} \mid i \in \{1, \dots, n\}\} \\ &= \sup\{\frac{1}{m} \cdot d(x_{h(i, m)}, x'_{h(i, m)}) \mid (i, m) \in \{1, \dots, n\} \times \mathbb{N}\} \\ &= \sup\{\frac{1}{g_2(k)} \cdot d(x_k, x'_k) \mid k \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup\{r_k \cdot d(x_k, x'_k) \mid k \in \mathbb{N}\} \\ &= d^1(y, y'). \end{aligned}$$

Wegen der uniformen Äquivalenz von d^1 und $d_{\mathbb{N}}$ sind $\underline{Y}$ und $\underline{Y}^{\mathbb{N}}$ uniform isomorph.

6.2.17 AUFGABEN

Sei (A_n) eine Folge nicht-leerer Teilmengen von $\underline{X}$ und

$A = \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_1 \times A_2 \times \dots$. Prüfen Sie die folgenden Behauptungen:

(1) A ist genau dann abgeschlossen in $\underline{X}^{\mathbb{N}}$, wenn jedes A_n abgeschlossen in $\underline{X}$ ist.

(2) A ist genau dann offen in $\underline{X}^{\mathbb{N}}$, wenn jedes A_n offen in $\underline{X}$ ist.

Beschreiben Sie:

(3) $\text{cl}A$ in $\underline{X}^{\mathbb{N}}$.

(4) $\text{int}A$ in $\underline{X}^{\mathbb{N}}$.

6.2.18 AUFGABEN

Zeigen Sie:

- (1) Ist $\underline{X}$ ein diskreter metrischer Raum, so gilt $\underline{X}^{\mathbb{N}} = \text{Bair}(X)$.
- (2) $(\text{Compl } \underline{X})^{\mathbb{N}}$ ist Vervollständigung von $\underline{X}^{\mathbb{N}}$.
- (3) Ist $(f_n: \underline{X} \rightarrow \underline{Y})$ eine Folge (gleichmäßig) stetiger Abbildungen, so ist die durch $f((x_n)) = (f_n(x_n))$ definierte Abbildung $f: \underline{X}^{\mathbb{N}} \rightarrow \underline{Y}^{\mathbb{N}}$ (gleichmäßig) stetig. (Vergl. mit 6.2.7).

6.3 DER RAUM $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ UND DAS CANTORSCHES DISKONTINUUM $\mathbb{D}$

6.3.1 THEOREM

Ist $\underline{X}$ ein kompakter, total-unzusammenhängender Raum mit wenigstens zwei Punkten, so ist $\underline{X}^{\mathbb{N}}$ zum Cantorschen Diskontinuum $\mathbb{D}$ uniform isomorph.

Beweis:

Der Raum $\underline{X}^{\mathbb{N}}$ ist nach 6.2.10 kompakt, nach 6.2.14 total-unzusammenhängend und nach 6.2.15 in sich dicht und somit nach 5.3.4 uniform isomorph zu $\mathbb{D}$.

6.3.2 THEOREM

- (1) Die Räume $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und $\mathbb{D}$ sind uniform isomorph.
- (2) Die Räume $\mathbb{D}$ und $\mathbb{D}^{\mathbb{N}}$ sind uniform isomorph.
- (3) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind die Räume $\mathbb{D}$ und $\mathbb{D}^n$ uniform isomorph.

Beweis:

- (1) folgt aus 6.3.1, (2) und (3) folgen aus (1) und 6.2.16.

6.3.3 THEOREM (Struktursatz für kompakte, total-unzusammenhängende Räume)

Äquivalent sind:

- (a) $\underline{X}$ ist kompakt und total-unzusammenhängend.
- (b) $\underline{X}$ ist zu einem abgeschlossenen Teilraum von $\mathbb{D}$ uniform isomorph.
- (c) $\underline{X}$ ist zu einem abgeschlossenen Teilraum von $\mathbb{D}$ topologisch isomorph.

Beweis:

- (a) $\Rightarrow$ (b): Nach 6.2.6(2) ist $\underline{X}$ zu einem abgeschlossenen Teilraum von $\underline{X}^{\mathbb{N}}$ und somit nach 6.3.1 zu einem abgeschlossenen Teilraum von $\mathbb{D}$ uniform isomorph.
- (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a): Trivial.

6.3.4 THEOREM

Ist $\underline{A}$ ein abgeschlossener Teilraum eines kompakten, total-unzusammenhängenden Raumes $\underline{X}$, so existiert zu jeder stetigen Abbildung $f: \underline{A} \rightarrow \underline{Y}$

von $\underline{A}$ in einen nicht-leeren metrischen Raum $\underline{Y}$ eine stetige Fortsetzung $g: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$.

Beweis:

Nach 6.3.3 existiert ein uniformer Isomorphismus $h: \underline{X} \rightarrow \underline{B}$ von $\underline{X}$ auf einen abgeschlossenen Teilraum $\underline{B}$ von $\underline{D}$. Dieser induziert einen uniformen Isomorphismus k von $\underline{A}$ auf einen abgeschlossenen Teilraum $\underline{C}$ von $\underline{D}$. Nach 5.3.13 hat die stetige Abbildung $f \circ k^{-1}: \underline{C} \rightarrow \underline{Y}$ eine stetige Fortsetzung $l: \underline{D} \rightarrow \underline{Y}$. Somit ist $g = l \circ h: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ eine stetige Fortsetzung von f .

6.3.5 SATZ

Jeder nicht-leere, kompakte, total-unzusammenhängende Raum $\underline{X}$ ist ein stetiges Bild von $\underline{D}$.

Beweis:

Nach 6.3.3 existiert ein abgeschlossener Teilraum $\underline{A}$ von $\underline{D}$ und ein uniformer Isomorphismus $h: \underline{A} \rightarrow \underline{X}$. Nach 5.3.12 existiert eine stetige, surjektive Abbildung $r: \underline{D} \rightarrow \underline{A}$. Somit ist $f = h \circ r$ eine stetige Abbildung von $\underline{D}$ auf $\underline{X}$.

6.3.6 AUFGABEN

Zeigen Sie:

- (1) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ läßt sich $\underline{D}$ darstellen als disjunkte Vereinigung von n uniformen Zerlegungsmengen von $\underline{D}$, die alle zu $\underline{D}$ uniform isomorph sind.
- (2) $\underline{D}$ läßt sich darstellen als abzählbare disjunkte Vereinigung von abgeschlossenen Teilräumen von $\underline{D}$, die alle zu $\underline{D}$ uniform isomorph sind.
- (3) $\underline{D}$ läßt sich darstellen als disjunkte Vereinigung von c abgeschlossenen Teilräumen von $\underline{D}$, die alle zu $\underline{D}$ uniform isomorph sind.

6.3.7 AUFGABEN

Sei $\underline{X}$ der durch $\underline{D} \cup \{\frac{1}{2}\}$ bestimmte Teilraum von $\underline{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie:

- (1) Für jedes n sind $\underline{X}$ und $\underline{X}^n$ uniform isomorph.
- (2) $\underline{X}^{\mathbb{N}}$ ist uniform isomorph zu $\underline{D}$.
- (3) $\underline{X}^{\mathbb{N}}$ ist nicht topologisch isomorph zu $\underline{X}$.
- (4) Jeder der beiden (topologisch nicht isomorphen) metrischen Räume $\underline{X}$ und $\underline{D}$ ist zu einem abgeschlossenen Teilraum des anderen uniform isomorph.

6.4 DER HILBERT-QUADER $\mathbb{H} = [0,1]^{\mathbb{N}}$

6.4.1 DEFINITION

Der Raum $[0,1]^{\mathbb{N}}$ heißt *Hilbert-Quader* und wird mit $\mathbb{H}$ bezeichnet.

6.4.2 SATZ

Der Hilbert-Quader $\mathbb{H}$ ist kompakt, zusammenhängend und in sich dicht.

Beweis:

6.2.10, 6.2.13 und 6.2.15.

6.4.3 SATZ

(1) Die Räume $\mathbb{H}$ und $\mathbb{H}^{\mathbb{N}}$ sind uniform isomorph.

(2) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind die Räume $\mathbb{H}$ und $\mathbb{H}^n$ uniform isomorph.

Beweis:

6.2.16.

6.4.4 SATZ

Der Hilbert-Quader $\mathbb{H}$ ist stetiges Bild des Cantorsche Diskontinuums $\mathbb{D}$.

Beweis:

Nach 5.3.6 existiert eine stetige Abbildung f von $\mathbb{D}$ auf $[0,1]$. Die durch $x = (x_n) \mapsto (f(x_n))$ definierte Abbildung $g: \mathbb{D}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{H} = [0,1]^{\mathbb{N}}$ ist surjektiv und stetig, denn ist $(x_m) = ((x_n^m))$ eine gegen $x = (x_n)$ konvergierende Folge in $\mathbb{D}^{\mathbb{N}}$, so konvergiert nach 6.2.4 für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Folge (x_n^m) in $\mathbb{D}$ gegen x_n , also wegen der Stetigkeit von f die Folge $(f(x_n^m))$ in $[0,1]$ gegen $f(x_n)$, also nach 6.2.4 die Folge $(g(x_m))$ in $[0,1]^{\mathbb{N}}$ gegen $g(x)$. Nach 6.3.2 existiert ein uniformer Isomorphismus $h: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}^{\mathbb{N}}$. Somit ist $g \circ h: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}$ eine stetige Abbildung von $\mathbb{D}$ auf $\mathbb{H}$.

6.4.5 BEMERKUNG

Obiger Satz hat den Leser hoffentlich verblüfft. Man bedenke: Das Cantorsche Diskontinuum ist ein ganz "dünner" Teilraum von $[0,1]$, der Hilbert-Quader $\mathbb{H} = [0,1]^{\mathbb{N}}$ hingegen ein gewaltig großer Raum, der nicht nur $[0,1]$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ den Raum $[0,1]^n$ als recht kleinen Teilraum enthält, sondern sogar $\mathfrak{c}$ paarweise disjunkte Teilräume, von denen jeder zu $\mathbb{H}$ selbst uniform isomorph ist. Für jedes $x \in [0,1]$ ist nämlich der durch $A_x = \{(x_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}} \mid x_1 = x\}$ bestimmte Teilraum A_x von $\mathbb{H}$ zu $\mathbb{H}$ selbst uniform isomorph.

Als nächstes wollen wir zeigen, daß jeder kompakte metrische Raum zu einem abgeschlossenen Teilraum von $\mathbb{H}$ uniform isomorph ist. Dazu benötigen wir einige Vorbereitungen.

6.4.6 SATZ

Ist (f_n) eine Folge gleichmäßig stetiger Abbildungen $f_n: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ und gibt es zu je zwei nicht benachbarten Teilmengen A und B von $\underline{X}$ ein $n \in \mathbb{N}$ derart, daß $f_n[A]$ und $f_n[B]$ nicht benachbart in $\underline{Y}$ sind, so ist die durch $x \mapsto (f_n(x))$ definierte Abbildung f von $\underline{X}$ auf den durch $Z = \{(f_n(x)) \mid x \in X\}$ bestimmten Teilraum $\underline{Z}$ von $\underline{Y}^{\mathbb{N}}$ ein uniformer Isomorphismus.

Beweis:

Nach 6.2.7 ist $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Z}$ gleichmäßig stetig. Sind x und x' zwei verschiedene Punkte von X , so sind die Mengen $\{x\}$ und $\{x'\}$ nicht benachbart in $\underline{X}$. Somit gibt es ein n mit $f_n(x) \neq f_n(x')$, woraus $f(x) \neq f(x')$ folgt. Folglich ist $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Z}$ nicht nur surjektiv, sondern auch injektiv und somit bijektiv. Sind A und B nicht-benachbarte Teilmengen von $\underline{X}$, so gibt es ein n derart, daß $f_n[A]$ und $f_n[B]$ nicht benachbart in $\underline{Y}$ sind und somit einen positiven Abstand $r = \text{dist}(f_n[A], f_n[B])$ haben. Hieraus folgt $\text{dist}(f[A], f[B]) \geq \frac{1}{n} \cdot r > 0$. Also sind $f[A]$ und $f[B]$ nicht benachbart in $\underline{Z}$. Nach 2.1.6 folgt hieraus die gleichmäßige Stetigkeit von $f^{-1}: \underline{Z} \rightarrow \underline{X}$. Somit ist $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Z}$ ein uniformer Isomorphismus.

6.4.7 SATZ

Ist (f_n) eine Folge stetiger Abbildungen $f_n: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ und gibt es zu jeder Teilmenge A von $\underline{X}$ und jedem Punkt $x \in \underline{X}$, der kein Berührungspunkt von A ist, ein $n \in \mathbb{N}$ derart, daß $f_n(x)$ in $\underline{Y}$ kein Berührungspunkt von $f_n[A]$ ist, so ist die durch $x \mapsto (f_n(x))$ definierte Abbildung von $\underline{X}$ auf den durch $Z = \{(f_n(x)) \mid x \in X\}$ bestimmten Teilraum $\underline{Z}$ von $\underline{Y}^{\mathbb{N}}$ ein topologischer Isomorphismus.

Beweis:

Analog dem Beweis von 6.4.6.

6.4.8 THEOREM (Struktursatz für separable metrische Räume)

Äquivalent sind:

- (a) $\underline{X}$ ist separabel.
- (b) $\underline{X}$ ist topologisch isomorph zu einem Teilraum von $\mathbb{H}$.
- (c) $\underline{X}$ ist topologisch isomorph zu einem Teilraum eines kompakten Raumes.
- (d) $\underline{X}$ ist topologisch isomorph zu einem total beschränkten Raum.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Nach 2.2.9(5) können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\text{diam } \underline{X} \leq 1$ voraussetzen. Für $X = \emptyset$ ist alles trivial. Andernfalls existiert eine Folge (x_n) in X , so daß die Menge $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $\underline{X}$ ist. Für jedes n ist nach 2.3.2 die durch $x \mapsto \text{dist}(x, \{x_n\})$ definierte Abbildung $f_n: \underline{X} \rightarrow [0, 1]$ stetig. Ist A eine Teilmenge von $\underline{X}$ und x ein Punkt von $\underline{X}$, der kein Berührungspunkt von A ist, so gilt $r = \text{dist}(A, x) > 0$. Folglich existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x) < \frac{r}{3}$. Hieraus folgt einerseits $|f_n(x)| < \frac{r}{3}$, andererseits $|f_n(a)| \geq \frac{2}{3}r$ für jedes $a \in A$. Also ist $f_n(x)$ kein Berührungspunkt von $f_n[A]$ in $[0, 1]$. Nach 6.4.7 wird somit durch $x \mapsto (f_n(x))$ ein topologischer Isomorphismus von $\underline{X}$ auf einen Teilraum von $[0, 1]^{\mathbb{N}} = \underline{\mathbb{H}}$ definiert.

(b) $\Rightarrow$ (c) folgt aus der Kompaktheit von $\underline{\mathbb{H}}$.

(c) $\Rightarrow$ (d) folgt aus 4.2.5.

(d) $\Rightarrow$ (a) folgt aus 4.1.14.

6.4.9 THEOREM (Struktursatz für kompakte metrische Räume)

Für $X \neq \emptyset$ sind äquivalent:

(a) $\underline{X}$ ist kompakt.

(b) $\underline{X}$ ist topologisch isomorph zu einem abgeschlossenen Teilraum von $\underline{\mathbb{H}}$.

(c) $\underline{X}$ ist uniform isomorph zu einem abgeschlossenen Teilraum von $\underline{\mathbb{H}}$.

(d) $\underline{X}$ ist stetiges Bild von $\underline{\mathbb{D}}$.

(e) $\underline{X}$ ist gleichmäßig stetiges Bild von $\underline{\mathbb{D}}$.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Ist $\underline{X}$ kompakt, so ist $\underline{X}$ separabel und somit nach dem Struktursatz 6.4.8 für separable metrische Räume topologisch isomorph zu einem Teilraum $\underline{Y}$ von $\underline{\mathbb{H}}$. Der Raum $\underline{Y}$ ist kompakt und somit nach 4.2.4 ein abgeschlossener Teilraum von $\underline{\mathbb{H}}$.

(b) $\Leftrightarrow$ (c) folgt aus 4.2.17.

(b) $\Rightarrow$ (d): Es sei $h: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ ein topologischer Isomorphismus von $\underline{X}$ auf einen abgeschlossenen Teilraum $\underline{Y}$ von $\underline{\mathbb{H}}$. Nach 6.4.4 existiert eine stetige Abbildung g von $\underline{\mathbb{D}}$ auf $\underline{\mathbb{H}}$. Sei $\underline{A}$ der durch $A = g^{-1}[\underline{Y}]$ bestimmte abgeschlossene Teilraum von $\underline{\mathbb{D}}$, und sei $g': \underline{A} \rightarrow \underline{Y}$ die zugehörige Einschränkung von g . Die surjektive stetige Abbildung $h^{-1} \circ g': \underline{A} \rightarrow \underline{X}$ läßt sich nach 5.3.13 zu einer stetigen Abbildung von $\underline{\mathbb{D}}$ auf $\underline{X}$ fortsetzen.

(d) $\Leftrightarrow$ (e) folgt aus 4.2.15.

(d) $\Rightarrow$ (a) folgt aus 4.2.18.

6.4.10 THEOREM (Struktursatz für total beschränkte metrische Räume)
Äquivalent sind:

- (a) X ist total beschränkt.
- (b) X ist Teilraum eines kompakten Raumes.
- (c) X ist uniform isomorph zu einem Teilraum von $\mathbb{H}$.

Beweis:

- (a) $\Leftrightarrow$ (b) folgt aus 4.2.5.
- (b) $\Rightarrow$ (c): Ist X Teilraum des kompakten Raumes Y , so existiert nach 6.4.9 ein uniformer Isomorphismus h von Y auf einen Teilraum A von $\mathbb{H}$. Ist B der durch $h[X]$ bestimmte Teilraum von $\mathbb{H}$, so ist die Einschränkung $h': X \rightarrow B$ ebenfalls ein uniformer Isomorphismus.
- (c) $\Rightarrow$ (a) folgt aus der totalen Beschränktheit von $\mathbb{H}$ und 4.1.10.

6.4.11 THEOREM (Struktursatz für separable, topologisch vollständige metrische Räume)

Äquivalent sind:

- (a) X ist separabel und topologisch vollständig.
- (b) X ist topologisch isomorph zu einem G_δ -Teilraum von $\mathbb{H}$.

Beweis:

- (a) $\Rightarrow$ (b): Nach 6.4.8 ist X topologisch isomorph zu einem Teilraum A von $\mathbb{H}$. Der Raum A ist topologisch vollständig und somit nach 3.5.6 ein G_δ -Teilraum von $\mathbb{H}$.
- (b) $\Rightarrow$ (a) folgt aus der topologischen Vollständigkeit von $\mathbb{H}$ und 3.5.5 sowie 6.4.8.

6.4.12 BEMERKUNG

Es gibt keinen metrischen Raum Y derart, daß jeder metrische Raum X zu einem Teilraum von Y topologisch isomorph ist. Das folgt bereits aus der Tatsache, daß zu jedem metrischen Raum Y ein metrischer Raum X mit $\text{Card } Y < \text{Card } X$ existiert. Schränkt man jedoch die Größe der Räume geeignet ein, so gelangt man zu einem geeigneten "Großraum". Genauer: Ist M eine beliebige unendliche Menge und ist Y der M -stachelige Igel, so sind äquivalent:

- (a) X hat eine dichte Teilmenge D mit $\text{Card } D \leq \text{Card } M$.
- (b) X ist topologisch isomorph zu einem Teilraum von $Y^{\mathbb{N}}$.

6.4.13 AUFGABEN

Zeigen Sie:

- (1) Jede stetige Abbildung von einem abgeschlossenen Teilraum A eines metrischen Raumes X in $\mathbb{H}$ läßt sich zu einer stetigen Abbildung auf X

fortsetzen.

(2) Jeder ultrametrische Raum X ist uniform isomorph zu einem Teilraum von $\text{Bair}(X)$. [Vergl. 6.2.18] .

(3) Ist X der durch die Menge $X = \{(x_n) \in l_2 \mid 0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}\}$ bestimmte Teilraum des Hilbert-Raumes l_2 , so gilt:

- (a) X ist nirgends dicht in l_2 .
- (b) X ist uniform isomorph zu $\mathbb{H}$.

6.5 DER RAUM $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ UND DER RAUM $\mathbb{IP}$ DER IRRATIONALZAHLEN

Auf $\mathbb{N}$ sind die Euklidische Metrik $d_E(x,y) = |x - y|$ und die diskrete

Metrik $d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq y \\ 0, & \text{falls } x = y \end{cases}$ uniform äquivalent. In diesem Para-

graphen wollen wir den Raum $(\mathbb{N}, d)$ der natürlichen Zahlen, versehen mit der diskreten Metrik d , mit $\mathbb{N}$ bezeichnen. Dann können wir nach 6.2.1 den Funktionenraum $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ bilden. Dieser hat viele interessante Eigenschaften.

6.5.1 SATZ

Ist m eine natürliche Zahl und r eine reelle Zahl mit $\frac{1}{m+1} < r \leq \frac{1}{m}$, so gilt für jedes Element $x = (x_n)$ aus $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$:

- (1) Die offene Kugel mit Zentrum x und Radius r hat in $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ folgende Gestalt: $S(x,r) = \{(y_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid (y_1, \dots, y_m) = (x_1, \dots, x_m)\}$.
- (2) $S(x,r)$ ist eine uniforme Zerlegungsmenge.
- (3) Der Teilraum $S(x,r)$ von $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ist uniform isomorph zu $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Beweis:

(1) Aus $d_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}((x_n), (y_n)) = \sup\{\frac{1}{n} \cdot d(x_n, y_n) \mid n \in \mathbb{N}\} = \sup\{\frac{1}{n} \mid x_n \neq y_n\}$ folgt unmittelbar die Äquivalenz $d_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}((x_n), (y_n)) < r \iff (x_1, \dots, x_m) = (y_1, \dots, y_m)$ und somit (1).

(2) Aus (1) folgt $\text{dist}(S(x,r), \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus S(x,r)) \geq \frac{1}{m}$. Also sind $S(x,r)$ und $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus S(x,r)$ nicht benachbart.

(3) Durch $(y_n) \mapsto (y_{n+m})$ wird ein uniformer Isomorphismus $h: S(x,r) \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definiert.

6.5.2 SATZ

Der Raum $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ hat folgende Eigenschaften:

- (1) $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ist topologisch vollständig.
- (2) $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ist separabel.
- (3) Jeder kompakte Teilraum von $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ist nirgends dicht in $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

(4) In $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ existiert zu jedem Punkt x und jeder Umgebung U von x eine Zerlegungsmenge A mit $x \in A \subset U$.

Beweis:

(1) folgt aus 6.2.11.

(2) folgt aus 6.2.12.

(3) Sei A ein kompakter Teilraum von $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Wäre A nicht nirgends-dicht in $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, so gäbe es ein $x \in A$ derart, daß A Umgebung von x in $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wäre. Dann existierte eine offene Kugel $S(x,r)$ in $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ mit $S(x,r) \subset A$. Nach 6.5.1(2) wäre $S(x,r)$ abgeschlossen in $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ und somit erst recht in A . Nach 4.2.4 wäre $S(x,r)$ somit kompakt. Andererseits ist $S(x,r)$ nach 6.5.1(3) topologisch isomorph zu $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ und somit nach 6.2.10 nicht kompakt. Widerspruch. Folglich ist A nirgends dicht in $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

(4) folgt aus 6.5.1(2).

6.5.3 BEMERKUNG

(1) Obige Eigenschaften von $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sind nicht zufällig ausgewählt. Es gilt nämlich der folgende bemerkenswerte Satz: Ein metrischer Raum X mit $X \neq \emptyset$ ist genau dann zu $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ topologisch isomorph, wenn er folgende Eigenschaften hat: X ist topologisch vollständig, separabel, jeder kompakte Teilraum von X ist nirgends dicht in X , und in X existiert zu jeder Umgebung U eines Punktes x eine Zerlegungsmenge A mit $x \in A \subset U$.

Diesen Satz werden wir nicht beweisen. Es sei nur angemerkt, daß ein Beweis ganz analog zum Beweis des Charakterisierungssatzes 5.3.4 von $\mathbb{D}$ durchgeführt werden kann, wenn man mit abzählbaren Zerlegungen anstelle von endlichen Zerlegungen arbeitet.

(2) Der Raum $\mathbb{I}\mathbb{P}$ der Irrationalzahlen ist nach 3.5.7 topologisch vollständig und erfüllt, wie leicht einzusehen ist, auch die anderen in (1) genannten Bedingungen. Er ist somit zu $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ topologisch isomorph.

(3) Ist X ein beliebiger topologisch vollständiger, nicht-kompakter, separabler Raum mit $\text{diam } X \leq 1$, so daß in X zu jeder Umgebung U eines Punktes x eine Zerlegungsmenge A mit $x \in A \subset U$ existiert, so erfüllt $X^{\mathbb{N}}$ die Bedingungen von (1), ist also zu $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ topologisch isomorph.

Versieht man insbesondere $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{P}$ mit der Metrik $d(x,y) = \min\{1, |x-y|\}$, so sind die metrischen Räume $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{P}^{\mathbb{N}}$ und $\mathbb{I}\mathbb{P}$ topologisch isomorph.

6.5.4 AUFGABE

Zeigen Sie, daß sich jeder der Räume $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ bzw. $X = \mathbb{I}\mathbb{P}$ als disjunk-

te Vereinigung von abzählbar vielen, zu $\underline{X}$ topologisch isomorphen Zerlegungsmengen von $\underline{X}$ darstellen läßt.

6.6 GLEICHMÄSSIGE KONVERGENZ IN $C(\underline{X})$

Wie bereits in 6.0 ausgeführt, läßt sich die gleichmäßige Konvergenz stets durch eine Metrik beschreiben. Ist insbesondere $\underline{X} = (X, d)$ ein kompakter metrischer Raum und ist $C(\underline{X})$ die Menge aller stetigen Abbildungen $f: \underline{X} \rightarrow \mathbb{R}$, so wird durch

$$\|f - g\| = \sup \{|f(x) - g(x)| \mid x \in X\}$$

eine Metrik auf $C(\underline{X})$ definiert, welche die gleichmäßige Konvergenz beschreibt. Die mit dieser Metrik versehenen Räume $C(\underline{X})$ spielen eine besondere Rolle in der Funktionalanalysis. Es folgen zwei besonders wichtige Ergebnisse über Teilräume $\underline{F}$ von $C(\underline{X})$, wobei $\underline{X}$ stets ein kompakter metrischer Raum ist.

6.6.1 SATZ (Arzela, Ascoli)

F ist genau dann total beschränkt in $C(\underline{X})$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) für jedes $x \in X$ ist $F(x) := \{f(x) \mid f \in F\}$ beschränkt
- (2) F ist gleichgradig stetig, d.h.

$$\forall x \in X \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall f \in F \quad \forall y \in X \quad d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Beweis:

Es sei $\underline{F}$ total beschränkt. Dann ist $\underline{F}$ nach 4.1.7 beschränkt und wegen $|f(x) - g(x)| \leq \|f - g\|$ für jedes $x \in X$, $f \in F$ und $g \in F$ folgt sofort (1).

Wir zeigen jetzt (2): Sei $x \in X$ und $\epsilon > 0$. Dann existiert ein $\frac{\epsilon}{3}$ -Netz $N = \{f_1, \dots, f_n\}$ in $\underline{F}$. Wegen der Stetigkeit der f_i gilt:

$\forall i = 1, \dots, n \quad \exists \delta_i > 0 \quad \forall y \in X \quad |x - y| < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\epsilon}{3}$. Für $\delta := \min \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ folgt also $\forall y \in X \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\epsilon}{3}$ für jedes $i = 1, \dots, n$. Da N ein $\frac{\epsilon}{3}$ -Netz in $\underline{F}$ ist, existiert für beliebiges $f \in F$ ein $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $\|f - f_j\| \leq \frac{\epsilon}{3}$. Also folgt für jedes $y \in X$ mit $|x - y| < \delta$

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_j(x)| + |f_j(x) - f_j(y)| + |f_j(y) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Für die Umkehrung zeigen wir zunächst, daß die Bedingung (2) äquivalent ist zur Bedingung

$$(2') \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall f \in F \quad \forall x \in X \quad \forall y \in X \quad d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Klar, daß $(2') \Rightarrow (2)$ gilt. Es gelte (2), aber nicht $(2')$, d.h.

$$\exists \epsilon_0 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists f_n \in F \quad \exists x_n, y_n \in X \quad \text{mit } d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \quad \text{und } |f_n(x_n) - f_n(y_n)| \geq \epsilon_0 (*).$$

Nach 4.2.10 existiert dann eine gegen ein $x_0 \in X$ konvergente Teilfolge (x_{n_i}) von (x_n) derart, daß die entsprechende Teilfolge (y_{n_i}) von (y_n)

gegen ein $y_0 \in X$ konvergiert. Wegen $d(x_{n_i}, y_{n_i}) < \frac{1}{n_i}$ und

$d(x_0, y_0) \leq d(x_0, x_{n_i}) + d(x_{n_i}, y_{n_i}) + d(y_{n_i}, y_0)$ für jedes $i \in \mathbb{N}$ folgt

$d(x_0, y_0) = 0$, also $x_0 = y_0$. Nach (2) folgt

$\exists \delta_0 > 0 \quad \forall f \in F \quad \forall y \in X \quad d(x_0, y) < \delta_0 \Rightarrow |f(x_0) - f(y)| < \frac{\varepsilon_0}{2} \quad (**).$

Da (x_{n_i}) und (y_{n_i}) gegen x_0 konvergieren, existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$d(x_0, x_{n_k}) < \frac{1}{n_k} < \delta_0$ und $d(x_0, y_{n_k}) < \frac{1}{n_k} < \delta_0$, insbesondere folgen wegen (**) für $m := n_k$

$|f_m(x_0) - f_m(x_m)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ und $|f_m(x_0) - f_m(y_m)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$, also
 $|f_m(x_m) - f_m(y_m)| \leq |f_m(x_m) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - f_m(y_m)| < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0$,
 im Widerspruch dazu, daß nach (*) $|f_m(x_m) - f_m(y_m)| \geq \varepsilon_0$ gilt.

F erfülle nun (1) und (2'). Sei $r > 0$. Wir haben die Existenz eines r -Netzes in $\underline{F}$ zu beweisen. Wegen (2') gilt:

$\exists \delta_0 > 0 \quad \forall f \in F \quad \forall x, y \in X \quad d(x, y) < \delta_0 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{r}{3} \quad (***)$.

Da $\underline{X}$ kompakt ist, ist $\underline{X}$ nach 4.2.2 total beschränkt. Also existiert ein δ_0 -Netz $\{x_1, \dots, x_n\}$ in $\underline{X}$. Wegen (1) ist $\{f(x_i) \mid f \in F\}$ für jedes $i = 1, \dots, n$ beschränkt, nach 4.1.12 sogar total beschränkt. Daher existiert zu jedem $i = 1, \dots, n$ eine endliche Überdeckung U_i von $\{f(x_i) \mid f \in F\}$ derart, daß $\text{diam } U < \frac{r}{3}$ für jedes $U \in U_i$ gilt.

Sei $\prod_{i=1}^n U_i = \{(U_1, \dots, U_n) \mid U_i \in U_i \text{ für alle } i = 1, \dots, n\}$; wir definieren nun eine Abbildung $\prod_{i=1}^n U_i \rightarrow F$ wie folgt: Hat ein

$j := (U_1, \dots, U_n) \in \prod_{i=1}^n U_i$ die Eigenschaft, daß ein $f \in F$ mit $f(x_i) \in U_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ existiert, so sei f_j ein solches f ; hat j diese Eigenschaft nicht, so sei f_j beliebig aus F gewählt. Wir beweisen, daß $\{f_j \mid j \in \prod_{i=1}^n U_i\}$ ein r -Netz in $\underline{F}$ ist: Sei $f \in \underline{F}$. Für jedes $i = 1, \dots, n$ existiert ein $U_i \in U_i$ mit $f(x_i) \in U_i$, es ist also

$j_0 := (U_1, \dots, U_n) \in \prod_{i=1}^n U_i$. Sei $x \in X$. Wir zeigen, daß $|f(x) - f_{j_0}(x)| \leq r$ ist: Da N ein δ_0 -Netz ist, existiert ein $x_k \in N$ mit $d(x, x_k) < \delta_0$.

Nach Definition von f_{j_0} und U_k gelten $f_{j_0}(x_k) \in U_k$, $f(x_k) \in U_k$ und (wegen $\text{diam } U_k < \frac{r}{3}$) $|f(x_k) - f_{j_0}(x_k)| < \frac{r}{3}$. Insgesamt ergibt sich also unter Beachtung von (***):

$|f(x) - f_{j_0}(x)| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k) - f_{j_0}(x_k)| + |f_{j_0}(x_k) - f_{j_0}(x)| < \frac{r}{3} + \frac{r}{3} + \frac{r}{3} = r$,
 also, da $x \in X$ beliebig war: $\|f - f_{j_0}\| \leq r$.

6.6.2 SATZ (Weierstraß, M.H. Stone)

F ist dicht in $C(\underline{X})$, falls F die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (1) alle konstanten Funktionen $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ gehören zu F
- (2) mit f und g gehören auch $f+g$ und $f \cdot g$ zu F
- (3) F trennt Punkte, d.h. zu je zwei verschiedenen Punkten x und y von X existiert ein $f \in F$ mit $f(x) \neq f(y)$.

Beweis:

Sei $f \in C(\underline{X})$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Wir gehen so vor, daß wir die Existenz einer Funktion g aus $cl F$, der abgeschlossenen Hülle von F in $C(\underline{X})$, mit $\|f-g\| \leq \epsilon$ beweisen (denn dann existiert ein $h \in F$ mit $\|g-h\| < \epsilon$, also folgt $\|f-h\| \leq \|f-g\| + \|g-h\| < 2\epsilon$ und damit die Behauptung).

Zu je zwei Punkten x, y von X existiert eine Funktion $g_{xy} \in F$ mit $g_{xy}(x) = f(x)$ und $g_{xy}(y) = f(y)$. Dies ist für $x = y$ wegen (1) klar; für $x \neq y$ existiert wegen (3) eine Funktion u aus F mit $u(x) \neq u(y)$. Dann gehört die Funktion g_{xy} , definiert durch

$$g_{xy}(z) := f(x) + (f(y) - f(x)) \cdot \frac{u(z) - u(x)}{u(y) - u(x)} \quad \text{für jedes } z \in X$$

wegen (1) und (2) zu F und hat die gewünschte Eigenschaft. Da $f-g_{xy}$ für jedes $x, y \in X$ stetig ist, gilt:

$\forall x, y \in X \quad \exists$ offene Umgebung U_{xy} von y mit $|g_{xy}(z) - f(z)| < \epsilon$, also $g_{xy}(z) < f(z) + \epsilon$ für alle $z \in U_{xy}$.

Daher ist für jedes $x \in X$ die Menge $U_x := \{U_{xy} | y \in X\}$ eine offene Überdeckung von X . Da X kompakt ist, existieren nach 4.3.4 endlich viele Punkte $y_1, \dots, y_n$ von X , so daß $\{U_{xy_1}, \dots, U_{xy_n}\}$ eine Überdeckung von X ist. Sei $g_x := \min\{g_{xy_1}, \dots, g_{xy_n}\}$, definiert durch

$$g_x(z) = \min\{g_{xy_1}(z), \dots, g_{xy_n}(z)\} \quad \text{für jedes } z \in X. \text{ Es ist } g_x \in C(\underline{X}) \text{ und}$$

es gelten $g_x(z) < f(z) + \epsilon$ für jedes $z \in X$ sowie $g_x(x) = f(x)$, also $(g_x - f)(x) = 0$ für jedes $x \in X$. Da $g_x - f$ stetig ist, gilt: $\forall x \in X \quad \exists$ offene Umgebung V_x von x mit $(g_x - f)(z) > -\epsilon$, also $f(z) - \epsilon < g_x$ für alle $z \in V_x$. Wieder nach 4.3.4 existieren dann endlich viele Punkte

$x_1, \dots, x_m$, so daß $\{V_{x_1}, \dots, V_{x_m}\}$ eine offene Überdeckung von X ist. Nun

sei $g := \max\{g_{x_1}, \dots, g_{x_m}\}$, definiert durch $g(z) = \max\{g_{x_1}(z), \dots, g_{x_m}(z)\}$

für jedes $z \in X$. Es ist $g \in C(\underline{X})$ und es gilt $f(z) - \epsilon < g(z) < f(z) + \epsilon$ für jedes $z \in X$, d.h. $\|f-g\| \leq \epsilon$.

Offensichtlich gehört dieses g nach Definition dann zur abgeschlossenen Hülle $cl F$ von F in $C(\underline{X})$, wenn mit je zwei Funktionen f_1, f_2 aus $cl F$ auch $\min\{f_1, f_2\}$ und $\max\{f_1, f_2\}$ zu $cl F$ gehören. Wegen

$$\min\{f_1, f_2\} = \frac{f_1 + f_2}{2} - \frac{|f_1 - f_2|}{2} \quad \text{und} \quad \max\{f_1, f_2\} = \frac{f_1 + f_2}{2} + \frac{|f_1 - f_2|}{2}$$

und weil für beliebige $a \in \mathbb{R}$, $f_1, f_2 \in \text{cl } F$ auch $f_1 + af_2 \in \text{cl } F$ (wie man leicht zeigt) gilt, genügt es, die Aussage: $h \in \text{cl } F \Rightarrow |h| \in \text{cl } F$ zu beweisen ($|h|$ ist durch $|h|(z) = |h(z)|$ für jedes $z \in X$ definiert). Diese Aussage braucht nur in der Version: $h \in F \Rightarrow |h| \in \text{cl } F$ bewiesen zu werden (bitte begründen Sie dies). Sei also $h \in F$. Da h nach 4.3.2 beschränkt ist, existiert ein $b \in \mathbb{R}^+$ mit $h[X] \subset [-b, b]$. Nach der folgenden Aufgabe 6.6.5 existiert zu jedem $\epsilon < 0$ ein reelles Polynom $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n$ mit $||p(t)| - |t|| < \epsilon$ für alle $t \in [-b, b]$, also gilt insbesondere $||p(h(x))| - |h(x)|| < \epsilon$ für alle $x \in X$, wobei wegen (1) und (2) $p \circ h = a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n$ zu F gehört.

6.6.3 BEISPIEL

Ist in 6.6.2 speziell $X = [a, b]$ ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$, so erfüllt die Menge aller reellen Polynome, aufgefaßt als reelle Funktionen auf $[a, b]$, die Bedingungen (1), (2) und (3). Jede stetige Funktion auf $[a, b]$ ist also Limes einer gleichmäßig konvergenten Folge von Polynomen. Dies ist der klassische Satz von Weierstraß.

6.6.4 AUFGABEN

Zeigen Sie:

(1) Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}$ mit $a < b$, $C \in \mathbb{R}^+$ und F die Menge aller differenzierbaren Funktionen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $|f'(x)| \leq C$ für alle $x \in X$. Dann ist F gleichgradig stetig.

(2) Sei X ein kompakter metrischer Raum und (f_n) eine Folge (gleichmäßig) stetiger Funktionen $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$, welche einfach gegen eine Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Dann sind äquivalent:

- (a) $\{f_n | n \in \mathbb{N}\}$ ist gleichgradig stetig
- (b) (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f .

(Hinweis: Benutzen Sie, daß die gleichgradige Stetigkeit äquivalent ist zur Bedingung (2') im Beweis zu 6.6.1 und daß (a) und (b) jeweils die gleichmäßige Stetigkeit von f implizieren (Begründung!))

6.6.5 AUFGABE

Sei (p_n) die Folge von reellen Polynomen p_n , die induktiv durch $p_0(t) = 0$ und $p_{n+1}(t) = p_n(t) + \frac{1}{2}(t - p_n(t))^2$ für alle $t \in [-1, 1]$ und $n \in \mathbb{N}$ definiert ist. Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

$$(a) \quad 0 \leq \sqrt{t} - p_n(t) \leq \frac{2\sqrt{t}}{2+n\sqrt{t}} \quad \text{für alle } t \in [0, 1] \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

und folgern Sie daraus:

(b) (p_n) konvergiert gleichmäßig auf $[0,1]$ gegen die Funktion $t \mapsto \sqrt{t}$

(c) für jedes $b \in \mathbb{R}$ mit $b > 0$ konvergiert die Folge (q_n) mit

$$q_n(t) := bp_n\left(\frac{t^2}{b^2}\right) \text{ für alle } t \in [-b,b] \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

gleichmäßig auf $[-b,b]$ gegen die Funktion $t \mapsto \sqrt{t^2} = |t|$.

6.7 EINFACHE KONVERGENZ IN $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

6.7.1 THEOREM (Inadäquatheit von Metriken)

Auf der Menge $X = \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gibt es keine Metrik d , welche die einfache Konvergenz beschreibt, d.h. so, daß für jedes $f \in X$ und jede Folge (f_n) in X folgende Aussagen äquivalent sind:

- (a) (f_n) konvergiert einfach gegen f .
- (b) In (X, d) konvergiert (f_n) gegen f .

Beweis:

Sei $A = \{f \in X \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist stetig}\}$, sei (r_n) eine Darstellung aller rationalen Zahlen als Folge, sei $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ die

durch $f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \{r_1, \dots, r_n\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ definierte Abbildung, und

sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \text{ definierte Abbildung. Dann konvergiert } (f_n) \text{ einfach gegen } f. \text{ Gäbe es eine Metrik } d \text{ auf } X, \text{ welche die einfache Konvergenz beschreibt, so gälte in } \underline{X} = (X, d):$$

(i) $f_n \in \text{cl } A$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ wegen 3.4.7(2) und 1.3.11.

(ii) $f \in \text{cl } \text{cl } A = \text{cl } A$ wegen 1.2.11(5).

(iii) $f \notin \text{cl } A$ wegen 3.4.6(3) und 1.3.11.

6.7.2 AUFGABE

Zeigen Sie:

(1) Jede in l_2 konvergierende Folge konvergiert einfach (d.h. koordinatenweise).

(2) Nicht jede einfach-konvergierende Folge in l_2 konvergiert in l_2 .