

§ 5 ZUSAMMENHANGSEIGENSCHAFTEN METRISCHER RÄUME

STUDIERHINWEISE ZU § 5

Dieser Paragraph dient im ersten Abschnitt der Untersuchung einer sehr anschaulichen Eigenschaft metrischer Räume, die - grob gesprochen - besagt, daß der Raum nicht in mehrere Teile zerfällt. Je nachdem, ob man mehr die topologischen bzw. die uniformen Aspekte in den Vordergrund stellt, gelangt man zu der topologischen Eigenschaft "Zusammenhang" bzw. zu der uniformen Eigenschaft "uniformer Zusammenhang". Diese Begriffe werden sich trotz ihrer großen Einfachheit als wesentliche Hilfsmittel zum Erkennen der (topologischen bzw. uniformen) Verschiedenheit zweier metrischer Räume herausstellen. In diesem Abschnitt werden die Parallelen, aber auch die Unterschiede zwischen mehr topologischer bzw. mehr uniformer Betrachtungsweise besonders deutlich. Dem Leser sei empfohlen, sich ausführlich mit den zahlreichen Beispielen zu beschäftigen.

Sodann werden metrische Räume untersucht, deren (uniform) zusammenhängende Teilräume höchstens einelementig sind. 5.2. enthält die wichtigsten allgemeinen Aussagen über derartige Räume. Hier dürfte der Leser keine Schwierigkeiten haben. 5.3 dient dem Studium eines speziellen metrischen Raumes, des Cantorsche Diskontinuums $\mathbb{D}$. Dem Leser sei empfohlen, sich sehr sorgfältig mit der Definition dieses Raumes zu befassen, da dieser Raum, wie die Abschnitte 5.3 und 6.3 zeigen werden, zu den wichtigsten metrischen Räumen gehört. Der Beweis des Charakterisierungssatzes 5.3.4 von $\mathbb{D}$ wird dem Leser möglicherweise nicht nur wegen seiner Länge Schwierigkeiten bereiten, sondern auch wegen seiner neuartigen Methodik: der induktiven Konstruktion gewisser Mengensysteme (genauer: Zerlegungen). Auf diese Methode haben wir bisher verzichten können, und wir werden sie (mit Ausnahme von 5.3.4) im Verlauf dieses Kurses auch weiterhin nicht benötigen. Diejenigen, die ihre topologischen Kenntnisse später noch vertiefen möchten, werden an dieser Methode allerdings Gefallen finden müssen. Sie ist ein wesentliches Hilfsmittel zur Feinanalyse metrischer (und topologischer) Räume.

5.4 dient ebenfalls dem Studium eines speziellen Raumes, des zerbrechlichen Kegels $\mathbb{K}$. Dieser Raum ist im Gegensatz zum Cantorsche Diskontinuum nicht sonderlich wichtig. Seine merkwürdigen Eigenschaften sollen vielmehr nur zeigen, daß unsere naive Anschauung - obwohl ein unersetzliches Hilfsmittel - uns gelegentlich in die Irre führen kann. Der Beweis von 5.4.3 ist nicht ganz einfach und kann notfalls übergangen werden.

5.0 EINFÜHRUNG

Eine wichtige Aufgabe der Topologie ist es, Methoden zu entwickeln, die es gestatten, die Frage zu beantworten, ob zwei gegebene metrische Räume X und Y topologisch oder uniform isomorph sind. Eine positive Beantwortung dieser Frage besteht in der Regel in der effektiven Konstruktion eines topologischen oder uniformen Isomorphismus $f: X \rightarrow Y$. Z.B. haben wir auf diese Weise die topologische Isomorphie der Räume $]0,1[$, $\mathbb{R}$ und $\{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ nachgewiesen. Eine negative Beantwortung der Frage besteht in der Regel in der Angabe einer topologischen oder uniformen Eigenschaft, die einer der Räume X und Y hat, der andere hingegen nicht. So ist z.B. der Raum $[0,1]$ kompakt, der Raum $]0,1[$ hin-

gegen nicht, woraus folgt, daß diese Räume nicht topologisch isomorph sind. So sind die Räume $\mathbb{R}$ und $]0,1[$ zwar topologisch isomorph, aber nicht uniform isomorph, denn $\mathbb{R}$ ist vollständig, $]0,1[$ hingegen nicht. Das Spektrum topologischer und uniformer Eigenschaften metrischer Räume, das wir bisher kennen (z.B. Vollständigkeit, topologische Vollständigkeit, totale Beschränktheit, Separabilität und Kompaktheit), gestattet für einige der folgenden Raumpaare X und Y die Beantwortung der Frage, ob sie topologisch oder uniform isomorph sind, ist jedoch noch zu klein, um die Frage für alle aufgeführten Paare zu entscheiden:

- (0) $\mathbb{R}$ und $\mathbb{P}$
- (1) $]0,1[$ und $[0,1[$
- (2) $\mathbb{R}$ und $\{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$
- (3) $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$
- (4) $\mathbb{P}$ und $\mathbb{P}^2$
- (5) $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}^2$
- (6) $\mathbb{Q} \times \mathbb{P}$ und $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$
- (7) $\mathbb{P}^2$ und $\mathbb{P} \times \mathbb{R}$
- (8) $[0,1]$ und $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
- (9) S^1 und $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
- (10) S^2 und der Torus $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}$
- (11) X-stacheliger Igel und Y-stacheliger Igel.

In diesem Kapitel werden wir topologische und uniforme Eigenschaften metrischer Räume studieren, die besonders geeignet sind, Fragen der obigen Art zu beantworten. Das sei an den Beispielen (0) und (1) kurz demonstriert. Die Räume $\mathbb{R}$ und $\mathbb{P}$ sind nicht uniform isomorph, denn $\mathbb{R}$ ist vollständig, $\mathbb{P}$ hingegen nicht. Die Räume $\mathbb{R}$ und $\mathbb{P}$ sind auch topologisch nicht isomorph. Das können wir jedoch noch nicht nachweisen, denn beide stimmen in allen bisher betrachteten topologischen Eigenschaften überein: beide sind topologisch vollständig, separabel, in sich dicht und nicht kompakt. Wir werden jedoch sehen, was anschaulich klar ist, daß $\mathbb{R}$ "zusammenhängend" ist, $\mathbb{P}$ hingegen nicht.

Die Räume $]0,1[$ und $[0,1[$ sind, wie wir uns erinnern, weder uniform noch topologisch isomorph. Ersteres folgte aus der Tatsache, daß $\text{Comp }]0,1[\setminus]0,1[$ genau 2 Punkte enthält, $\text{Comp } [0,1[\setminus [0,1[$ hingegen nur einen. Letzteres haben wir mit Hilfe des aus der Analysis bekannten Zwischenwertsatzes nachgewiesen. Sehr viel einfacher und natürlicher ist folgendes Argument: Entfernen wir einen beliebigen Punkt x aus $]0,1[$, so ist der Rest $]0,1[\setminus \{x\}$ nicht mehr "zusammenhängend", sondern "zerfällt" in die Teile $]0,x[$ und $]x,1[$; entfernen wir hingegen den Punkt 0 aus $[0,1[$, so ist der Rest $[0,1[\setminus \{0\} =]0,1[$ zusammen-

menhängend. Darüber hinaus werden wir sehen, daß der Zwischenwertsatz der Analysis ein einfacher Spezialfall des viel allgemeineren (und sehr leicht zu beweisenden) Satzes ist, daß jedes stetige Bild eines zusammenhängenden Raumes wieder zusammenhängend ist.

In gewissem Gegensatz zu den zusammenhängenden Räumen stehen die Räume, die wie $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{P}$ in einzelne Punkte "zerfallen", d.h., die keinen zusammenhängenden Teilraum mit mehr als einem Punkt besitzen. Ein besonders wichtiges Beispiel, dessen Bedeutung im 6. Paragraphen klar wird, ist das sogenannte Cantorsche Diskontinuum $\mathbb{D}$, ein kompakter Teilraum von $[0,1]$. Ein weniger wichtiger aber besonders merkwürdiger Raum ist der zerbrechliche Kegel $\mathbb{K}$, ein zusammenhängender Teilraum von $[0,1]^2$, der nach Wegnahme eines einzigen Punktes in seine einzelnen Punkte "zerfällt".

5.1 ZUSAMMENHÄNGENDE METRISCHE RÄUME

5.1.1 DEFINITION

Ein metrischer Raum X heißt (uniform) zusammenhängend, wenn jede (gleichmäßig) stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ von X in einen zweielementigen metrischen Raum Y konstant ist.

Der (uniforme) Zusammenhang metrischer Räume läßt sich in vielfacher Weise charakterisieren. Die obigen Definitionen lassen die Paralleltäten zwischen Zusammenhang und uniformen Zusammenhang besonders deutlich hervortreten. Intuitiv näherliegende Charakterisierungen des uniformen Zusammenhangs finden Sie insbesondere in 5.1.14 und des Zusammenhangs in 5.1.31(5).

5.1.2 SATZ

Jeder zusammenhängende Raum ist uniform zusammenhängend.

Beweis:

Jede gleichmäßig stetige Abbildung ist stetig.

5.1.3 THEOREM ((gleichmäßig) stetige Bilder (uniform) zusammenhängender Räume sind (uniform) zusammenhängend)

Ist $f: X \rightarrow Y$ eine (gleichmäßig) stetige Abbildung von X auf Y , so folgt aus dem (uniformen) Zusammenhang von X der (uniforme) Zusammenhang von Y .

Beweis:

Wäre Y nicht (uniform) zusammenhängend, so gäbe es eine nicht konstan-

te, (gleichmäßig) stetige Abbildung $g: \underline{Y} \rightarrow \underline{Z}$ von $\underline{Y}$ in einen zweielementigen metrischen Raum $\underline{Z}$. Also wäre $g \circ f: \underline{X} \rightarrow \underline{Z}$ eine nicht konstante (gleichmäßig) stetige Abbildung von $\underline{X}$ in einen zweielementigen metrischen Raum, im Widerspruch zum (uniformen) Zusammenhang von $\underline{X}$.

5.1.4 BEMERKUNG

(1) Aus obigem Theorem folgt unmittelbar, daß Zusammenhang ein topologischer Begriff und uniformer Zusammenhang ein uniformer Begriff ist.

(2) Etwas später werden wir sehen, daß der aus der Analysis bekannte Zwischenwertsatz eine einfache Folgerung aus obigem Theorem ist.

5.1.5 SATZ

Ist $\underline{A}$ ein dichter Teilraum von $\underline{X}$, so folgt aus dem (uniformen) Zusammenhang von $\underline{A}$ der (uniforme) Zusammenhang von $\underline{X}$.

Beweis:

Ist $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ eine (gleichmäßig) stetige Abbildung von $\underline{X}$ in einen zweielementigen metrischen Raum, so ist die Einschränkung $f|_A: \underline{A} \rightarrow \underline{Y}$ von f auf $\underline{A}$ konstant. Die konstante Fortsetzung $g: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ von $f|_A$ auf $\underline{X}$ ist auch (gleichmäßig) stetig. Wegen $f|_A = g|_A$ folgt $f = g$ nach 3.2.4(1). Also ist f konstant.

5.1.6 SATZ

Ist $\underline{A}$ ein dichter Teilraum von $\underline{X}$, so sind äquivalent:

- (a) $\underline{A}$ ist uniform zusammenhängend.
- (b) $\underline{X}$ ist uniform zusammenhängend.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Ist in obigem Satz (5.1.5) enthalten.

(b) $\Rightarrow$ (a): Ist $f: \underline{A} \rightarrow \underline{Y}$ eine gleichmäßig stetige Abbildung von $\underline{A}$ in einen zweielementigen metrischen Raum $\underline{Y}$, so folgt aus der Vollständigkeit von $\underline{Y}$ nach dem Fortsetzbarkeitstheorem für gleichmäßig stetige Abbildungen in vollständige Räume (3.2.3), daß eine gleichmäßig stetige Fortsetzung $g: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ von f existiert. Wegen (b) ist g und damit auch f konstant.

5.1.7 FOLGERUNG

Äquivalent sind:

- (a) $\underline{X}$ ist uniform zusammenhängend.
- (b) $\text{Comp } \underline{X}$ ist uniform zusammenhängend.

5.1.8 SATZ

Ist $\{A_i \mid i \in I\}$ eine Menge (uniform) zusammenhängender Teilräume von $\underline{X}$ mit $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, so ist auch der durch $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ bestimmte Teilraum A von $\underline{X}$ (uniform) zusammenhängend.

Beweis:

Sei $a \in \bigcap_{i \in I} A_i$. Ist $f: \underline{A} \rightarrow \underline{Y}$ eine (gleichmäßig) stetige Abbildung von $\underline{A}$ in einen zweielementigen metrischen Raum, so ist f auf jedem A_i konstant. Somit gilt $f(x) = f(a)$ für jedes $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Also ist f konstant.

Vor den Beispielen wollen wir noch einige mehr "interne" Beschreibungen (uniform) zusammenhängender Räume geben.

5.1.9 DEFINITION

Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes $\underline{X}$ heißt (uniforme) Zerlegungsmenge von $\underline{X}$, wenn A und $X \setminus A$ keinen gemeinsamen Berührungspunkt in $\underline{X}$ haben (wenn A und $X \setminus A$ nicht benachbart sind).

5.1.10 SATZ

$\underline{X}$ ist genau dann (uniform) zusammenhängend, wenn $\emptyset$ und X die einzigen (uniformen) Zerlegungsmengen von $\underline{X}$ sind.

Beweis:

(1) Ist A eine (uniforme) Zerlegungsmenge von $\underline{X}$ mit

$\emptyset \neq A \neq X$, so wird durch
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in A \\ 1, & \text{falls } x \notin A \end{cases}$$
 eine (gleichmäßig)

stetige, nicht konstante Abbildung $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ von $\underline{X}$ in den metrischen Raum $\underline{Y} = \{0, 1\}$ definiert.

(2) Ist umgekehrt $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ eine nicht-konstante, (gleichmäßig) stetige Abbildung von $\underline{X}$ in einen zweielementigen metrischen Raum $\underline{Y}$ und ist $y \in f[X]$, so ist $A = f^{-1}[\{y\}]$ eine (uniforme) Zerlegungsmenge von $\underline{X}$ mit $\emptyset \neq A \neq X$.

5.1.11 SATZ

Eine Teilmenge A von X ist genau dann Zerlegungsmenge von $\underline{X}$, wenn sie sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

Beweis:

(1) Ist A offen und abgeschlossen, so ist auch $X \setminus A$ abgeschlossen und offen. Als disjunkte, abgeschlossene Mengen haben A und $X \setminus A$ keinen gemeinsamen Berührungspunkt.

(2) Ist A Zerlegungsmenge von $\underline{X}$, so liegt kein Berührungspunkt von A in $X \setminus A$. Also ist A abgeschlossen in $\underline{X}$. Analog ist $X \setminus A$ abgeschlossen in $\underline{X}$, denn kein Berührungspunkt von $X \setminus A$ liegt in $X \setminus (X \setminus A) = A$. Also ist $A = X \setminus (X \setminus A)$ als Komplement einer abgeschlossenen Menge auch offen.

5.1.12 FOLGERUNG

Ein metrischer Raum $\underline{X}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn $\emptyset$ und X die einzigen Teilmengen von $\underline{X}$ sind, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind.

5.1.13 DEFINITION

Seien $\underline{X}$ ein metrischer Raum und ϵ eine positive reelle Zahl. Eine ϵ -Kette von x nach y in $\underline{X}$ ist eine endliche Folge $(x_1, \dots, x_n)$ von Elementen in $\underline{X}$ mit $x_1 = x$, $x_n = y$ und $d(x_i, x_{i+1}) < \epsilon$ für $i = 1, \dots, n-1$. Punkte x und y von $\underline{X}$ heißen ϵ -verkettet in $\underline{X}$, wenn in $\underline{X}$ eine ϵ -Kette von x nach y existiert. $\underline{X}$ heißt verkettet, wenn für jedes $\epsilon > 0$ je zwei Punkte in $\underline{X}$ ϵ -verkettet sind.

5.1.14 SATZ

Ein metrischer Raum ist genau dann uniform zusammenhängend, wenn er verkettet ist.

Beweis:

(1) Sei $\underline{X}$ uniform zusammenhängend, und sei $\epsilon > 0$. Ist X leer, so ist $\underline{X}$ trivialerweise verkettet. Ist $X \neq \emptyset$, so sei x_0 ein festes Element von X . Ferner sei A die Menge aller mit x_0 ϵ -verketteten Punkte von $\underline{X}$. Für jedes $x \in A$ und jedes $y \in X \setminus A$ gilt dann offenbar $d(x, y) \geq \epsilon$. Also sind A und $X \setminus A$ nicht benachbart. Da A eine nicht-leere Teilmenge von X ist, folgt aus dem uniformen Zusammenhang von $\underline{X}$ sofort $A = X$. Also ist $\underline{X}$ verkettet.

(2) Ist $\underline{X}$ nicht uniform zusammenhängend, so gibt es eine Teilmenge A von X mit $\emptyset \neq A \neq X$ und $\text{dist}(A, X \setminus A) = r > 0$. Folglich ist kein Punkt von A mit einem Punkt von $X \setminus A$ r -verkettet. Also ist $\underline{X}$ nicht verkettet.

Als nächstes wenden wir uns konkreten Beispielen zu. Insbesondere werden wir die (uniform) zusammenhängenden Teilräume von $\underline{\mathbb{R}}$ intern charakterisieren.

5.1.15 DEFINITION

Eine Teilmenge X von $\mathbb{R}$ heißt ein Intervall, wenn aus $x \in X$, $y \in X$, $r \in \mathbb{R}$ und $x < r < y$ stets $r \in X$ folgt.

Insbesondere sind die leere Menge und alle einelementigen Teilmengen

von $\mathbb{R}$ Intervalle. Sie werden auch ausgeartete Intervalle genannt.

5.1.16 SATZ (Charakterisierung zusammenhängender Teilräume von $\mathbb{R}$)

Für jede Teilmenge X von $\mathbb{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) X ist zusammenhängend.
- (b) X ist ein Intervall.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Wäre X kein Intervall, so gäbe es $x \in X$, $y \in X$ und $z \in \mathbb{R} \setminus X$ mit $x < z < y$. Also wäre $A = X \cap \{r \in \mathbb{R} \mid r < z\} = X \cap \{r \in \mathbb{R} \mid r \leq z\}$ eine sowohl offene als auch abgeschlossene Teilmenge von X mit $\emptyset \neq A \neq X$, im Widerspruch zum Zusammenhang von X .

(b) $\Rightarrow$ (a): Wäre X nicht zusammenhängend, so gäbe es eine Teilmenge A von X mit $\emptyset \neq A \neq X$, die in X sowohl offen als auch abgeschlossen wäre. Sei $x \in A$ und $y \in X \setminus A$, und sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x < y$. Die Menge $\{a \in A \mid a < y\}$ wäre nicht-leer und nach oben beschränkt, besäße also eine kleinste obere Schranke z in $\mathbb{R}$ mit $x \leq z \leq y$. Wegen (b) gehörte z zu X , wegen $z \in \text{cl}\{a \in A \mid a < y\}$ und der Abgeschlossenheit von A in X sogar zu A , woraus insbesondere $z < y$ folgte. Weiter würde aus $[z, y] \subset X$, aus der Offenheit von A in X und $z \in A$ folgen, daß für ein geeignetes $r > 0$ auch das Intervall $[z, z+r]$ zu A gehörte, im Widerspruch zur Definition von z .

5.1.17 THEOREM (Charakterisierung zusammenhängender Räume durch stetige reellwertige Abbildungen)

Für jeden metrischen Raum X sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) X ist zusammenhängend.
- (b) Für jede stetige Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ist $f[X]$ ein Intervall.

Beweis:

Im Fall $X = \emptyset$ sind (a) und (b) trivialerweise erfüllt. Sei also $X \neq \emptyset$.

(a) $\Rightarrow$ (b): Nach 5.1.3 ist $f[X]$ als stetiges Bild eines zusammenhängenden Raumes zusammenhängend. Somit ist $f[X]$ nach 5.1.16 ein Intervall.

(b) $\Rightarrow$ (a): Ist X nicht zusammenhängend, so gibt es eine nicht konstante, stetige Abbildung $g: X \rightarrow Y$ von X in einen zweielementigen metrischen Raum Y . Sei $y_0 \in Y$. Dann ist

die durch
$$h(y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } y \neq y_0 \\ 1, & \text{falls } y = y_0 \end{cases}$$
 definierte Abbildung $h: Y \rightarrow \mathbb{R}$

stetig, somit auch die Abbildung $f = h \circ g: X \rightarrow \mathbb{R}$, aber $f[X] = \{0, 1\}$ ist kein Intervall.

5.1.18 BEMERKUNG

Der *Zwischenwertsatz* der Analysis besagt, daß für jedes abgeschlossene Intervall $[a,b]$ in $\mathbb{R}$ und jede stetige Abbildung $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ die Menge $f[[a,b]]$ ein Intervall ist. Wegen 5.1.16 ist das ein Spezialfall der Implikation (a) $\Rightarrow$ (b) in 5.1.17. Aus dem Zwischenwertsatz folgt unmittelbar folgender Fixpunktsatz: Jede stetige Abbildung $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ hat mindestens einen Fixpunkt; denn für die durch $x \mapsto f(x) - x$ definierte stetige Abbildung $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt $g(0) \geq 0$ und $g(1) \leq 0$, woraus die Existenz eines $z \in [0,1]$ mit $g(z) = 0$, d.h. $f(z) = z$ folgt. Der *Brouwersche Fixpunktsatz* besagt, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ jede stetige Abbildung $f: [0,1]^n \rightarrow [0,1]^n$ mindestens einen Fixpunkt hat. Der Satz ist erheblich schwerer zu beweisen.

5.1.19 SATZ (Charakterisierung uniform zusammenhängender Teilräume von $\mathbb{R}$)

Für Teilmengen X von $\mathbb{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) X ist uniform zusammenhängend.
- (b) Die abgeschlossene Hülle $\text{cl}X$ von X in $\mathbb{R}$ ist ein Intervall.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Wäre $\text{cl}X$ kein Intervall, so gäbe es $x \in \text{cl}X$, $y \in \text{cl}X$ und $z \in \mathbb{R} \setminus \text{cl}X$ mit $x < z < y$. Folglich wäre $A = \{a \in X \mid a < z\}$ eine uniforme Zerlegungsmenge von X , denn aus $\text{dist}(A, X \setminus A) = 0$ würde $z \in \text{cl}X$ folgen. Wegen $\emptyset \neq A \neq X$ wäre X nicht uniform zusammenhängend.

(b) $\Rightarrow$ (a): Ist $Y = \text{cl}X$ ein Intervall, so ist Y nach 5.1.16 zusammenhängend, also erst recht uniform zusammenhängend. Als dichter Teilraum von Y ist X nach 5.1.6 ebenfalls uniform zusammenhängend.

5.1.20 SATZ (Charakterisierung uniform zusammenhängender Räume durch gleichmäßig stetige, reellwertige Abbildungen)

Für jeden metrischen Raum X sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) X ist uniform zusammenhängend.
- (b) Für jede gleichmäßig stetige Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ist $\text{cl}f[X]$ ein Intervall.

Beweis:

Der Fall $X = \emptyset$ ist wiederum trivial. Sei also $X \neq \emptyset$.

(a) $\Rightarrow$ (b): Nach 5.1.3 ist $f[X]$ als gleichmäßig stetiges Bild eines uniform zusammenhängenden Raumes selbst uniform zusammenhängend. Nach 5.1.19 ist $\text{cl}f[X]$ ein Intervall.

(b) $\Rightarrow$ (a): Ist X nicht uniform zusammenhängend, so gibt es eine nicht

konstante, gleichmäßig stetige Abbildung $g: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ von $\underline{X}$ in einen zweielementigen metrischen Raum $\underline{Y}$. Sei $y_0 \in Y$.

Die durch $h(y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } y = y_0 \\ 1, & \text{falls } y \neq y_0 \end{cases}$ definierte Abbildung $h: \underline{Y} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$

ist gleichmäßig stetig, somit auch die Abbildung $f = h \circ g: \underline{X} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$.

Aber $f[X] = \{0,1\}$ ist kein Intervall.

5.1.21 BEISPIELE

(1) $\underline{\mathbb{R}}$, $]0,1[$, $[0,1[$ und $[0,1]$ sind zusammenhängend.

(2) $\underline{\mathbb{Q}}$ und $\underline{\mathbb{P}}$ sind uniform zusammenhängend, aber nicht zusammenhängend.

Insbesondere sind $\underline{\mathbb{P}}$ und $\underline{\mathbb{R}}$ nicht topologisch isomorph.

(3) $\underline{\mathbb{R}^n}$ ist zusammenhängend. Das sieht man z.B. folgendermaßen: Ist $\{A_i | i \in I\}$ die Menge aller Geraden durch einen festen Punkt x des $\underline{\mathbb{R}^n}$, so gilt:

(i) $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, denn $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$.

(ii) $\bigcup_{i \in I} A_i = \mathbb{R}^n$.

(iii) Jedes A_i ist topologisch isomorph zu $\underline{\mathbb{R}}$ und somit zusammenhängend. Also folgt aus 5.1.8, daß $\underline{\mathbb{R}^n}$ zusammenhängend ist.

(4) Analog sieht man, daß $[0,1]^n$, $]0,1[^n$ etc. zusammenhängend sind.

(5) Für jedes $n \geq 1$ ist die n -dimensionale Sphäre

$\underline{S^n} = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ zusammenhängend. Das

sieht man z.B. folgendermaßen: Zunächst wird durch $(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ ein topologischer Isomorphismus von

$\underline{S^n}_+ = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \underline{S^n} | x_{n+1} \geq 0\}$ auf den zusammenhängenden Teilraum $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ von $\underline{\mathbb{R}^n}$ definiert. Somit ist $\underline{S^n}_+$

zusammenhängend. Ebenso folgt der Zusammenhang von

$\underline{S^n}_- = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \underline{S^n} | x_{n+1} \leq 0\}$. Wegen $\underline{S^n}_+ \cap \underline{S^n}_- \neq \emptyset$ folgt aus 5.1.8 der Zusammenhang von $\underline{S^n} = \underline{S^n}_+ \cup \underline{S^n}_-$.

(6) Analog beweist man den Zusammenhang von Torus, Kegel etc.

(7) Ein diskreter Raum $\underline{X}$ ist genau dann (uniform) zusammenhängend, wenn X höchstens ein Element enthält.

5.1.22 BEMERKUNG

Da fast alle uns bisher interessierenden Räume sich als zusammenhängend erwiesen, scheint es zunächst, daß der Zusammenhangsbegriff nicht sonderlich gut geeignet ist, um bei der Lösung der am Anfang dieses

Paragraphen aufgeworfenen Frage nach der topologischen Klassifizierung metrischer Räume zu helfen. Das ist jedoch ein Irrtum. Zwar sind z.B. $]0,1[$ und $[0,1[$ beide zusammenhängend, dennoch können wir beide jetzt topologisch unterscheiden: entfernt man nämlich irgendeinen Punkt aus $]0,1[$, so ist der Rest nicht mehr zusammenhängend, entfernt man hingegen 0 aus $[0,1[$, so ist der Rest sehr wohl zusammenhängend, und hieraus folgt sofort, daß $]0,1[$ und $[0,1[$ nicht topologisch isomorph sein können. Wie wir im folgenden verdeutlichen wollen, ist die Methode, aus zwei Räumen topologisch isomorphe Teile wegzuschneiden und die Zusammenhangseigenschaften der Reste zu vergleichen, ein sehr natürliches Hilfsmittel zur topologischen Unterscheidung metrischer Räume.

5.1.23 DEFINITION

Ein Element x eines zusammenhängenden metrischen Raumes $\underline{X}$ heißt *Schnittpunkt* von $\underline{X}$, falls $\underline{X} \setminus \{x\}$ nicht zusammenhängend ist; andernfalls *Nicht-schnittpunkt* von $\underline{X}$.

5.1.24 BEMERKUNG

Die Begriffe Schnittpunkt und Nichtschnittpunkt sind topologische Begriffe, d.h. wenn $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ ein topologischer Isomorphismus ist, so ist x genau dann ein (Nicht-)Schnittpunkt von $\underline{X}$, wenn $f(x)$ ein (Nicht-)Schnittpunkt von $\underline{Y}$ ist. Insbesondere haben topologisch isomorphe zusammenhängende Räume dieselbe Zahl von (Nicht-)Schnittpunkten.

5.1.25 BEISPIELE

- (1) Jeder Punkt von $\underline{\mathbb{R}}$ und von $]0,1[$ ist Schnittpunkt.
- (2) $[0,1[$ und $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ haben je einen Nichtschnittpunkt.
- (3) $[0,1]$ hat genau zwei Nichtschnittpunkte.
- (4) Ist X eine Menge mit mindestens 2 Elementen, so hat der X -stachelige Igel genau $\text{Card} X$ Nichtschnittpunkte.
- (5) Die Räume $\underline{\mathbb{R}}^n$ (für $n \geq 2$), die Sphären $\underline{S}^n$ (für $n \geq 1$) und der Torus $\underline{T}$ haben keine Schnittpunkte.

Hieraus folgt u.a.:

- (i) $]0,1[$ und $[0,1[$ sind nicht topologisch isomorph.
- (ii) $\underline{\mathbb{R}}$ und $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ sind nicht topologisch isomorph.
- (iii) $\underline{\mathbb{R}}$ und $\underline{\mathbb{R}}^2$ sind nicht topologisch isomorph.
- (iv) $\underline{\emptyset}$ und $\underline{\emptyset}^2$ sind nicht uniform isomorph, denn andernfalls wären auch

ihre Vervollständigungen $\text{Compl } \mathbb{Q}$ und $\text{Compl } \mathbb{Q}^2$ uniform isomorph, was nach (iii) nicht möglich ist, denn $\text{Compl } \mathbb{Q}$ ist uniform isomorph zu $\mathbb{R}$ und $\text{Compl } \mathbb{Q}^2$ zu $\mathbb{R}^2$. Man kann jedoch zeigen, was wir nicht ausführen, daß jeder abzählbare, in sich dichte metrische Raum zu $\mathbb{Q}$ topologisch isomorph ist. Insbesondere sind für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Räume $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}^n$ topologisch isomorph.

(v) $\mathbb{P}$ und $\mathbb{P}^2$ sind nicht uniform isomorph, denn andernfalls wären auch ihre Vervollständigungen $\text{Compl } \mathbb{P}$ und $\text{Compl } \mathbb{P}^2$, also $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ uniform isomorph. Hingegen sind $\mathbb{P}$ und $\mathbb{P}^2$ topologisch isomorph, worauf wir noch eingehen werden.

(vi) $[0,1]$ und S^1 sind nicht topologisch isomorph. Man kann zeigen, daß ein metrischer Raum X genau dann zu $[0,1]$ topologisch (und somit uniform) isomorph ist, wenn er folgende 3 Bedingungen erfüllt:

(a) X ist kompakt.

(β) X ist zusammenhängend.

(γ) X hat genau 2 Nichtschnittpunkte.

Ebenso läßt sich zeigen, daß ein metrischer Raum X mit wenigstens 2 Punkten genau dann zu S^1 topologisch (und somit uniform) isomorph ist, wenn er folgende 3 Bedingungen erfüllt:

(a) X ist kompakt.

(β) X ist zusammenhängend.

(γ) Entfernt man genau 2 Punkte aus X , so ist der Rest nicht zusammenhängend.

Diese Resultate machen die Bedeutung von Zusammenhangseigenschaften besonders klar.

(vii) S^1 und S^2 sind nicht topologisch isomorph. Entfernt man nämlich 2 Punkte von S^1 , so ist der Rest nicht zusammenhängend, entfernt man hingegen 2 Punkte von S^2 , so ist der Rest zusammenhängend.

(viii) Sind X und Y mindestens zweielementige Mengen, so sind der X -stachelige Igel und der Y -stachelige Igel genau dann topologisch isomorph, wenn $\text{Card}X = \text{Card}Y$ gilt.

(ix) S^2 und T sind nicht topologisch isomorph. Das folgt aus dem folgenden anschaulichen aber mühsam zu beweisenden *Jordanschen Kurvensatz*: Entfernt man aus der Sphäre S^2 einen zu S^1 topologisch isomorphen Teilraum, so ist der Rest nicht zusammenhängend. Hingegen ist leicht zu erkennen, daß der aus dem Torus $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2=1\}$ durch Entfernen des zu S^1 topologisch isomorphen Teilraumes $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-2)^2+z^2=1, y=0\}$ entstehende Rest zusammenhängend ist.

5.1.26 BEMERKUNG

Wir haben gesehen (5.1.14), daß ein metrischer Raum genau dann uniform zusammenhängend ist, wenn er verkettet ist. Eine entsprechend anschauliche Charakterisierung zusammenhängender Räume gibt es leider nicht. Allerdings kann man recht leicht zeigen, daß ein offener Teilraum $\underline{X}$ von $\mathbb{R}^n$ genau dann zusammenhängend ist, wenn je 2 Punkte x und y von $\underline{X}$ durch einen Streckenzug in $\underline{X}$ verbunden werden können, d.h. wenn es eine endliche Folge $(x_1, \dots, x_m)$ von Punkten in $\underline{X}$ mit $x = x_1$ und $y = x_m$ so gibt, daß für jedes $i = 1, \dots, m-1$ die Strecke, welche die Punkte x_i und x_{i+1} verbindet, ganz in $\underline{X}$ liegt. Wie der Teilraum $\{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ von $\mathbb{R}^2$ zeigt, läßt sich obiger Satz nicht auf beliebige Teilräume von $\mathbb{R}^n$ übertragen. Ist $\underline{X}$ hingegen kompakt, so ist $\underline{X}$ genau dann zusammenhängend, wenn $\underline{X}$ verkettet ist, wie folgender Satz zeigt:

5.1.27 SATZ

Ist $\underline{X}$ kompakt, so sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) $\underline{X}$ ist zusammenhängend.
- (b) $\underline{X}$ ist uniform zusammenhängend.
- (c) $\underline{X}$ ist verkettet.

Beweis:

Die Äquivalenz von (a) und (b) folgt sofort aus der Tatsache, daß eine Abbildung von einem kompakten Raum in einen beliebigen metrischen Raum genau dann stetig ist, wenn sie gleichmäßig stetig ist (4.2.15). Die Äquivalenz von (b) und (c) ist der Inhalt von Satz 5.1.14.

5.1.28 BEMERKUNG

Anschaulich besagt das Verkettetsein von $\underline{X}$, daß man von jedem Punkt $x \in X$ zu jedem Punkt $y \in X$ in endlich vielen Schritten gelangen kann, ganz egal wie kurz die Beine sind, die man hat (sofern die Schrittlänge positiv ist). Eine andere Frage liegt nahe: Ist es möglich, in einem kompakten, zusammenhängenden Raum $\underline{X}$ je 2 Punkte von X durch einen Bogen in $\underline{X}$ (d.h. einen zu $[0,1]$ topologisch isomorphen Teilraum von $\underline{X}$) zu verbinden? Die Antwort ist negativ, wie folgendes Beispiel zeigt: Der durch $X = \{(0, x) \mid x \in [-1, 1]\} \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x \in]0, 1]\}$ bestimmte Teilraum $\underline{X}$ von $\mathbb{R}^2$ ist zusammenhängend und kompakt, aber es gibt keinen Bogen in $\underline{X}$, der die Punkte $(0, 0)$ und $(1, \sin 1)$ miteinander verbindet (vgl. 5.1.30(2)). Ist ein kompakter, zusammenhängender Raum $\underline{X}$ jedoch lokal-zusammenhängend (d.h. existiert zu jedem $x \in X$ und jeder Umgebung U von x eine zusammenhängende Umgebung V von x mit $x \in V \subset U$), so lassen sich, wie man zeigen kann, je zwei Punkte von X durch einen

Bogen in $\underline{X}$ verbinden. Die nicht-leeren, kompakten, zusammenhängenden und lokal-zusammenhängenden metrischen Räume sind übrigens auch aus einem anderen Grunde interessant: sie sind genau die stetigen Bilder von $\underline{I}$ (Sätze von Hahn und Mazurkiewicz).

5.1.29 THEOREM, DEFINITION (Existenz und Eindeutigkeit von Zusammenhangskomponenten)

Sei x ein Element eines metrischen Raumes $\underline{X}$. Weiter seien

$K(x) = \bigcup \{A \subset X \mid \underline{A} \text{ zusammenhängend und } x \in A\}$ und

$K_u(x) = \bigcup \{A \subset X \mid \underline{A} \text{ uniform zusammenhängend und } x \in A\}$.

Dann gilt:

(1) $\underline{K(x)}$ ($\underline{K_u(x)}$) ist der größte x enthaltende (uniform) zusammenhängende Teilraum von $\underline{X}$.

(2) $K(x)$ und $K_u(x)$ sind abgeschlossen in $\underline{X}$.

(3) Ist $\underline{X}$ kompakt, so ist $K(x) = K_u(x)$, und $K(x)$ besteht aus allen Punkten von $\underline{X}$, die für jedes $\epsilon > 0$ mit x ϵ -verkettet sind.

$\underline{K(x)}$ ($\underline{K_u(x)}$) heißt die (uniforme) Zusammenhangskomponente von x in $\underline{X}$.

Beweis:

(1) folgt unmittelbar aus 5.1.8.

(2) folgt unmittelbar aus 5.1.5 und (1).

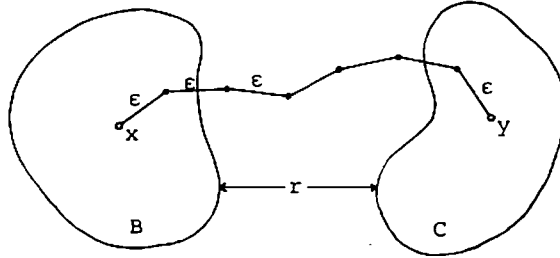
(3) Aus 5.1.2 folgt, daß $K(x) \subset K_u(x)$. Sei $A = \{y \in X \mid \text{für jedes } \epsilon > 0 \text{ ist } y \text{ mit } x \text{ } \epsilon\text{-verkettet}\} = \bigcap_{\epsilon > 0} A_\epsilon$, wobei A_ϵ für $\epsilon > 0$ die Menge aller Punkte aus $\underline{X}$ ist, die mit x ϵ -verkettet sind. Für jedes $\epsilon > 0$ ist A_ϵ eine uniforme Zerlegungsmenge von $\underline{X}$, denn offenbar gilt $\text{dist}(A_\epsilon, X \setminus A_\epsilon) \geq \epsilon$. Daher ist A_ϵ für jedes $\epsilon > 0$ abgeschlossen in $\underline{X}$, und somit ist auch A abgeschlossen in $\underline{X}$, was wir im folgenden ausnutzen werden. Wir sind fertig, wenn wir gezeigt haben, daß $\underline{A}$ zusammenhängend ist:

Wegen 5.1.14 ist nämlich $K_u(x) \subset A$; also gilt dann

$K(x) \subset K_u(x) \subset A \subset K(x)$, woraus (3) folgt.

Wir nehmen an, daß $\underline{A}$ nicht zusammenhängend ist. Dann gibt es eine nicht-konstante, stetige Abbildung $f: \underline{A} \rightarrow \underline{Y}$, wobei $\underline{Y}$ ein zweielementiger metrischer Raum ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $\underline{Y} = \{0,1\}$ wählen, wie Sie sich selbst leicht klarmachen können. (Hinweis: Ist $\underline{Y}$ ein diskreter metrischer Raum, $f_0: \underline{A} \rightarrow \underline{Y}$ stetig und nicht-konstant, so können Sie leicht eine stetige Abbildung $f_1: \underline{Y} \rightarrow \{0,1\}$ konstruieren, so daß $f = f_1 \circ f_0$ nicht-konstant ist.) Nach dem Fortsetzbarkeitstheorem (2.3.5) für $\{0,1\}$ läßt sich f zu einer stetigen

Abbildung $g: \underline{X} \rightarrow [0,1]$ fortsetzen. Die Mengen $B = g^{-1}[[0, \frac{1}{3}[$ und $C = g^{-1}[[\frac{2}{3}, 1]]$ sind offen, nicht-leer und haben disjunkte abgeschlossene Hüllen, somit einen positiven Abstand r . Ohne Einschränkung sei $x \in B$. Für jedes $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < r$ trifft A_ε die abgeschlossene Menge $D = X \setminus (B \cup C)$, denn mindestens ein Punkt y von C ist wegen $C \cap A \neq \emptyset$ mit x ε -verkettet, und da $\varepsilon < r$ ist, muß jede ε -Kette von x nach y auch Glieder außerhalb von $B \cup C$ haben:



Da aus $\varepsilon < \varepsilon'$ stets $A_\varepsilon \subset A_{\varepsilon'}$ folgt, ist für jedes ε die Menge $D_\varepsilon = D \cap A_\varepsilon$ nicht-leer. Somit ist $D_1, D_{\frac{1}{2}}, D_{\frac{1}{3}}, \dots$ eine monoton fallende Folge nicht-leerer, abgeschlossener Teilmengen von $\underline{X}$. Nach 4.3.2 ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_{\frac{1}{n}} = D \cap A$ nicht-leer. Das ist aber ein Widerspruch zu der Tatsache $g(y) \in [0, \frac{1}{3}]$ für jedes $y \in A$ und $g(y) \in [\frac{2}{3}, 1]$ für jedes $y \in D$.

5.1.30 AUFGABEN

Zeigen Sie:

(1) In dem durch $X = \{(0,0), (0,1)\} \cup \{(\frac{1}{n}, \frac{m}{n}) \mid n \in \mathbb{N}, m \in \{0, \dots, n\}\}$ bestimmten Teilraum $\underline{X}$ von $\mathbb{R}^2$ gilt $K((0,0)) = \{(0,0)\}$, aber $(0,0)$ und $(0,1)$ sind ε -verkettet für jedes $\varepsilon > 0$ (vgl. 5.1.29).

(2) Ist $\underline{X}$ der durch $X = \{(0,x) \mid x \in [-1,1]\} \cup \{(x, \sin \frac{1}{x}) \mid x \in]0,1]\}$ bestimmte Teilraum des $\mathbb{R}^2$, so gilt:

(i) $\underline{X}$ ist kompakt.

(ii) $\underline{X}$ ist zusammenhängend.

(iii) Es gibt keine stetige Abbildung $f: [0,1] \rightarrow \underline{X}$ mit $f(0) = (0,0)$ und $f(1) = (1, \sin 1)$.

(3) Sind A und B Teilmengen eines metrischen Raumes $\underline{X}$ mit $A \subset B \subset \text{cl}A$, so folgt aus dem (uniformen) Zusammenhang von $\underline{A}$ der (uniforme) Zusammenhang von $\underline{B}$.

5.1.31 AUFGABEN

Prüfen Sie,

- (1) ob jeder vollständige, uniform zusammenhängende Raum bereits zusammenhängend ist,
- (2) für welche X der Raum $B(X)$ zusammenhängend ist,
- (3) die Beziehungen zwischen dem (uniformen) Zusammenhang von $\underline{X}$ und $\text{Hyp } \underline{X}$.
- (4) Zeigen Sie, daß ein metrischer Raum $\underline{X}$ genau dann zusammenhängend ist, wenn jeder zu $\underline{X}$ topologisch isomorphe Raum uniform zusammenhängend ist.
- (5) Zeigen Sie, daß ein metrischer Raum $\underline{X}$ genau dann zusammenhängend ist, wenn zu je zwei nicht-leeren Teilmengen A und B von X ein Punkt $x \in X$ mit $\text{dist}(x, A) = \text{dist}(x, B)$ existiert.

5.1.32 AUFGABEN

Zeigen Sie:

- (1) Ist $\underline{X}$ zusammenhängend, so hat X entweder höchstens einen oder überabzählbar viele Elemente.
- (2) $\underline{X}$ ist genau dann (uniform) zusammenhängend, wenn jede (gleichmäßig) stetige Abbildung von $\underline{X}$ in einen diskreten metrischen Raum konstant ist.
- (3) Die metrischen Räume l_∞ , l_2 und l_1 sind zusammenhängend.
- (4) $\underline{X}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von $\underline{X}$ verkettet ist (d.h. wenn zu je zwei nicht-leeren Elementen U und V von $\mathcal{U}$ eine endliche Folge $(U_1, \dots, U_n)$ in $\mathcal{U}$ mit $U = U_1$, $V = U_n$ und $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ für $i \in \{1, \dots, n-1\}$ existiert).
- (5) Ist $\underline{X}$ lokal-zusammenhängend (siehe 5.1.28), so ist jede Zusammenhangskomponente $K(x)$ eine Zerlegungsmenge in $\underline{X}$.

5.2 TOTAL-UNZUSAMMENHÄNGENDE METRISCHE RÄUME

5.2.1 DEFINITION

Ein metrischer Raum $\underline{X}$ heißt (uniform) *total-unzusammenhängend*, wenn jeder (uniform) zusammenhängende Teilraum von $\underline{X}$ höchstens einen Punkt enthält.

5.2.2 SATZ

Jeder uniform total-unzusammenhängende Raum ist total-unzusammenhängend.

Beweis:

Jeder zusammenhängende Raum ist uniform zusammenhängend.

5.2.3 SATZ

Ist $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ eine (gleichmäßig) stetige, injektive Abbildung, so ist mit $\underline{Y}$ auch $\underline{X}$ (uniform) total-unzusammenhängend.

Beweis:

Ist $\underline{A}$ ein (uniform) zusammenhängender Teilraum von $\underline{X}$, so ist nach 5.1.3 $f[\underline{A}]$ ein (uniform) zusammenhängender Teilraum von $\underline{Y}$ und somit höchstens einpunktig. Da f injektiv ist, ist auch $\underline{A}$ höchstens einpunktig.

5.2.4 SATZ

Jeder Teilraum eines (uniform) total-unzusammenhängenden Raumes ist (uniform) total-unzusammenhängend.

Beweis:

5.2.3.

5.2.5 BEMERKUNG

Aus 5.2.3 folgt unmittelbar, daß totaler Unzusammenhang ein topologischer Begriff und uniformer totaler Unzusammenhang ein uniformer Begriff ist.

5.2.6 BEISPIELE

- (1) Jeder diskrete Raum ist uniform total-unzusammenhängend.
- (2) $\underline{\mathbb{Q}}$ und $\underline{\mathbb{P}}$ sind total-unzusammenhängend, aber nicht uniform total-unzusammenhängend; sie sind sogar uniform zusammenhängend.
- (3) $\underline{\mathbb{Q}} \times \underline{\mathbb{P}}$ ist total-unzusammenhängend; denn ist $\underline{A}$ ein zusammenhängender Teilraum von $\underline{\mathbb{Q}} \times \underline{\mathbb{P}}$, so wird $\underline{A}$ nach 5.1.3 durch die beiden Projektionen $(x,y) \mapsto x$ und $(x,y) \mapsto y$ auf zusammenhängende und somit höchstens einelementige Teilräume $\underline{\mathbb{Q}}$ bzw. $\underline{\mathbb{P}}$ abgebildet, woraus folgt, daß $\underline{A}$ selbst höchstens einelementig ist. Der Raum $\underline{\mathbb{Q}} \times \underline{\mathbb{R}}$ hingegen ist nicht total-unzusammenhängend, denn für jedes $r \in \mathbb{Q}$ ist $\{r\} \times \underline{\mathbb{R}}$ ein zu $\underline{\mathbb{R}}$ topologisch isomorpher und somit zusammenhängender Teilraum von $\underline{\mathbb{Q}} \times \underline{\mathbb{R}}$. Folglich sind $\underline{\mathbb{Q}} \times \underline{\mathbb{P}}$ und $\underline{\mathbb{Q}} \times \underline{\mathbb{R}}$ nicht topologisch isomorph.
- (4) Analog erkennt man, daß $\underline{\mathbb{P}}^2$ und $\underline{\mathbb{P}} \times \underline{\mathbb{R}}$ nicht topologisch isomorph sind, denn $\underline{\mathbb{P}}^2$ ist total-unzusammenhängend, $\underline{\mathbb{P}} \times \underline{\mathbb{R}}$ hingegen nicht.

5.2.7 SATZ

Jede (gleichmäßig) stetige Abbildung $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ von einem (uniform) zusammenhängenden Raum in einen (uniform) total-unzusammenhängenden Raum ist konstant.

Beweis:

Nach 5.1.3 ist $f[X]$ ein (uniform) zusammenhängender Teilraum von Y und somit höchstens einelementig. Folglich ist f konstant.

5.2.8 BEMERKUNG

Obige Eigenschaft kann man sowohl zur Charakterisierung (uniform) zusammenhängender Räume als auch zur Charakterisierung (uniform) total-unzusammenhängender Räume benutzen, wie folgende Sätze zeigen:

5.2.9 SATZ

Äquivalent sind:

- (a) X ist (uniform) zusammenhängend.
- (b) Jede (gleichmäßig) stetige Abbildung von X in einen (uniform) total-unzusammenhängenden Raum ist konstant.

Beweis:

- (a) $\Rightarrow$ (b): 5.2.7.
- (b) $\Rightarrow$ (a): Folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß jeder zweielementige metrische Raum uniform total-unzusammenhängend ist.

5.2.10 SATZ

Äquivalent sind:

- (a) X ist (uniform) total-unzusammenhängend.
- (b) Jede (gleichmäßig) stetige Abbildung von einem (uniform) zusammenhängenden Raum nach X ist konstant.

Beweis:

- (a) $\Rightarrow$ (b): 5.2.7.
- (b) $\Rightarrow$ (a): Ist Y ein (uniform) zusammenhängender Teilraum von X , so ist die Einbettung $f: Y \rightarrow X$ gleichmäßig stetig, nach (b) also konstant. Somit ist Y höchstens einelementig.

5.2.11 BEMERKUNG

Kompakte Räume sind besonders einfach zu handhaben. Das wird auch hier wieder deutlich.

5.2.12 SATZ

Ist X kompakt, so sind äquivalent:

- (a) X ist total-unzusammenhängend.
- (b) X ist uniform total-unzusammenhängend.

Beweis:

- (a) $\Rightarrow$ (b): 5.1.29.

(b) $\Rightarrow$ (a): 5.2.2.

5.2.13 THEOREM

Ist $\underline{X}$ kompakt, so sind äquivalent:

(a) $\underline{X}$ ist total-unzusammenhängend.

(b) Ist U gleichmäßige Umgebung von A in $\underline{X}$, so gibt es eine uniforme Zerlegungsmenge B in $\underline{X}$ mit $A \subset B \subset U$.

(c) Ist U Umgebung von x in $\underline{X}$, so gibt es eine Zerlegungsmenge B in $\underline{X}$ mit $x \in B \subset U$.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge B_n aller Punkte von $\underline{X}$, die $\frac{1}{n}$ -verkettet mit wenigstens einem $a \in A$ sind, eine A umfassende uniforme Zerlegungsmenge von $\underline{X}$, denn es gilt $\text{dist}(B_n, X \setminus B_n) \geq \frac{1}{n}$. Es genügt somit zu zeigen, daß ein n mit $B_n \subset \text{int } U$ existiert. Wäre das nicht der Fall, so wäre $(B_n \setminus \text{int } U)$ eine monoton fallende Folge nicht-leerer, abgeschlossener Mengen, hätte also nach 4.3.2 einen nicht-leeren Durchschnitt. Wäre x ein Element des Durchschnitts, so gäbe es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein a_n in A , das $\frac{1}{n}$ -verkettet mit x wäre. Ist a ein Verdichtungspunkt der Folge (a_n) , so gilt $a \in \text{cl } A$, und a ist mit x ϵ -verkettet für jedes $\epsilon > 0$. Nach 5.1.29 und dem totalen Unzusammenhang von $\underline{X}$ folgt hieraus $x = a$. Somit wäre a ein Element von $\text{cl } A \setminus \text{int } U = \text{cl } A \cap \text{cl}(X \setminus U)$, was nicht möglich ist, da U gleichmäßige Umgebung von A ist.

(b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a) gilt immer (warum?).

5.2.14 BEMERKUNG

Wie die Aufgaben 5.4.5 und 5.2.15(1) zeigen, gilt keine der Implikationen (a) $\Rightarrow$ (c) und (c) $\Rightarrow$ (b) des obigen Satzes für beliebige metrische Räume.

5.2.15 AUFGABEN

(1) Zeigen Sie, daß der durch $X = \{(0,0), (0,1)\} \cup \{(\frac{1}{n}, \frac{m}{n}) \mid n \in \mathbb{N}, m \in \{0, \dots, n\}\}$ bestimmte Teilraum $\underline{X}$ des $\mathbb{R}^2$ folgende Eigenschaften hat:

(i) $\underline{X}$ ist uniform total-unzusammenhängend.

(ii) $\underline{X}$ erfüllt die Bedingung (c) von 5.2.13.

(iii) $\underline{X}$ erfüllt die Bedingung (b) von 5.2.13 nicht.

(2) Zeigen Sie, daß für einen total beschränkten metrischen Raum $\underline{X}$ die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(a) $\text{Compl } \underline{X}$ ist total-unzusammenhängend.

(b) Zu je zwei nicht benachbarten Teilmengen A und B von $\underline{X}$ existiert

eine gleichmäßig stetige Abbildung $f: \underline{X} \rightarrow \underline{\{0,1\}}$ mit $f[A] \subset \{0\}$ und $f[B] \subset \{1\}$.

(3) Untersuchen Sie, ob aus dem uniformen totalen Unzusammenhang von $\underline{X}$ stets der uniforme totale Unzusammenhang von $\text{Comp } \underline{X}$ folgt.

(4) Gibt es einen zu $\underline{Q}$ topologisch isomorphen, uniform total-unzusammenhängenden metrischen Raum?

(5) Zeigen Sie:

(a) Jeder endliche metrische Raum ist uniform total-unzusammenhängend.

(b) Jeder diskrete metrische Raum ist uniform total-unzusammenhängend.

(c) Für jedes X ist $\text{Bair}(X)$ uniform total-unzusammenhängend.

(d) Jeder ultrametrische Raum ist uniform total-unzusammenhängend.

(6) Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(a) x ist ein isolierter Punkt in $\underline{X}$.

(b) $\{x\}$ ist eine Zerlegungsmenge in $\underline{X}$.

(c) $\{x\}$ ist eine uniforme Zerlegungsmenge in $\underline{X}$.

5.3 DAS CANTORSCHES DISKONTINUUM $\mathbb{D}$

Als nächstes wollen wir das sogenannte Cantorsche Diskontinuum $\mathbb{D}$ definieren und analysieren. Dieser Raum hat sehr viele interessante Eigenschaften und ist zweifellos, wie wir sehen werden, einer der wichtigsten metrischen Räume. Er gibt u.a. eine positive Antwort auf die naheliegende Frage, ob es überabzählbare, kompakte, total-unzusammenhängende Räume gibt.

5.3.1 DEFINITION

Der durch $\mathbb{D} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \mid (x_n) \text{ ist eine Folge in } \{0,2\} \right\}$ bestimmte Teilraum $\mathbb{D}$ von $\mathbb{R}$ heißt *Cantorsches Diskontinuum*.

5.3.2 BEMERKUNG

$\mathbb{D}$ kann auch folgendermaßen beschrieben werden. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei

$$D_m = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \mid (x_n) \text{ ist eine Folge in } \{0,1,2\} \text{ mit } \{x_1, \dots, x_m\} \subset \{0,2\} \right\}.$$

Dann gilt offenbar $[0,1] \supset D_1 \supset D_2 \supset \dots \supset \bigcap D_m = \mathbb{D}$.

Ferner ist D_1 Vereinigung der beiden Intervalle

$$\left[0, \frac{1}{3}\right] = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \mid (x_n) \text{ ist Folge in } \{0,1,2\} \text{ und } x_1 = 0 \right\} \text{ und}$$

$$\left[\frac{2}{3}, 1\right] = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \mid (x_n) \text{ ist Folge in } \{0,1,2\} \text{ und } x_1 = 2 \right\}.$$

Analog ist D_2 Vereinigung der 4 Intervalle

$$[0, \frac{1}{9}] = \{ \sum_1^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \mid (x_n) \text{ ist Folge in } \{0,1,2\} \text{ und } x_1 = x_2 = 0 \},$$

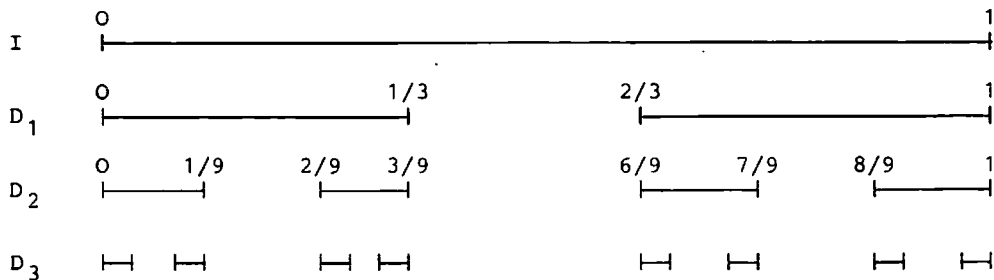
$$[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] = \{ \sum_1^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \mid (x_n) \text{ ist Folge in } \{0,1,2\} \text{ und } x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 2 \},$$

$$[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] = \{ \sum_1^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \mid (x_n) \text{ ist Folge in } \{0,1,2\} \text{ und } x_1 = 2 \text{ und } x_2 = 0 \},$$

$$[\frac{8}{9}, 1] = \{ \sum_1^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \mid (x_n) \text{ ist Folge in } \{0,1,2\} \text{ und } x_1 = x_2 = 2 \}.$$

Analog ist jedes D_n Vereinigung von 2^n Intervallen der Form $[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}]$, die man durch Fixieren der ersten $n \cdot x_i$ erhält.

D_{n+1} geht aus D_n hervor, indem man aus jedem der D_n aufbauenden Intervalle $[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}]$ das offene mittlere Drittel wegschneidet, also $[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}]$ durch $[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}] \setminus]\frac{3k+1}{3^{n+1}}, \frac{3k+2}{3^{n+1}}[= [\frac{3k}{3^{n+1}}, \frac{3k+1}{3^{n+1}}] \cup [\frac{3k+2}{3^{n+1}}, \frac{3k+3}{3^{n+1}}]$ ersetzt.



5.3.3 SATZ

Das Cantorsche Diskontinuum $\mathbb{D}$ hat folgende Eigenschaften:

- (1) $\mathbb{D}$ ist kompakt.
- (2) $\mathbb{D}$ ist total-unzusammenhängend.
- (3) $\mathbb{D}$ ist in sich dicht.
- (4) $\text{Card } \mathbb{D} = c$.

Beweis:

(1) Jedes D_n ist als Vereinigung von 2^n abgeschlossenen Intervallen selbst abgeschlossen. Somit ist $\mathbb{D} = \bigcap D_n$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$. Da $\mathbb{D}$ beschränkt ist, muß $\mathbb{D}$ kompakt sein.

(2) Sei X ein zusammenhängender Teilraum von $\mathbb{D}$. Dann ist X ein Intervall. Aus $X \subset D_n$ folgt, daß X in einem der D_n aufbauenden Intervalle liegt und somit eine Länge $\leq \frac{1}{3^n}$ hat. Da das für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist X höchstens einelementig.

(3) Sei $x \in \mathbb{D}$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein m mit $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} < \varepsilon$. Sei

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}, \text{ sei } y_n = \begin{cases} x_n & \text{für } n < m \\ 0 & \text{für } n \geq m \text{ und } x_n = 2 \\ 2 & \text{für } n \geq m \text{ und } x_n = 0 \end{cases}, \text{ und sei } y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{3^n}.$$

Dann gilt $y \in \mathbb{D}$, $x \neq y$ und $|x - y| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{3^n} \leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} < \epsilon$. Also

ist $\mathbb{D}$ in sich dicht.

(4) Die Menge M aller Folgen in $\{0, 2\}$ hat bekanntlich die Kardinalzahl

c . Die durch $(x_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$ definierte Abbildung $f: M \rightarrow \mathbb{D}$ ist bijek-

tiv. Also gilt $\text{Card } \mathbb{D} = c$.

Wie wir im folgenden sehen werden, ist $\mathbb{D}$ im wesentlichen der einzige nicht-leere, kompakte, total-unzusammenhängende, in sich dichte metrische Raum. Jeder Raum mit diesen Eigenschaften ist nämlich zu $\mathbb{D}$ uniform isomorph.

5.3.4 THEOREM (Charakterisierung des Cantorschen Diskontinuums)

Für jeden nicht-leeren metrischen Raum X sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (a) X ist kompakt, total-unzusammenhängend und in sich dicht.
- (b) X ist topologisch isomorph zu $\mathbb{D}$.
- (c) X ist uniform isomorph zu $\mathbb{D}$.

Beweis:

Aus der Kompaktheit von $\mathbb{D}$ folgt nach 5.2.17 die Äquivalenz von (b) und (c). Aus 5.3.3 folgt, daß (a) aus (b) folgt. Es genügt somit zu zeigen, daß je zwei nicht-leere, kompakte, total-unzusammenhängende, in sich dichte metrische Räume X und X' topologisch isomorph sind. Wir konstruieren einen topologischen Isomorphismus $f: X \rightarrow X'$ in mehreren Schritten:

(1) Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es eine Zahl n_0 , so daß zu jedem $m \geq n_0$ eine Zerlegung von X in m paarweise disjunkte, nicht-leere Zerlegungsmengen $A'_1, \dots, A'_m$ mit $\text{diam } A'_i \leq \epsilon$ für alle i existiert. Um das einzusehen, betrachte man ein $\frac{\epsilon}{4}$ -Netz $\{x_1, \dots, x_m\}$ in X . Für jedes x_i ist die Kugel $S(x_i, \frac{\epsilon}{2})$ eine gleichmäßige Umgebung der Kugel $S(x_i, \frac{\epsilon}{4})$. Somit existiert nach 5.2.13 eine uniforme Zerlegungsmenge B_i mit $S(x_i, \frac{\epsilon}{4}) \subset B_i \subset S(x_i, \frac{\epsilon}{2})$. Definiert man $A_i = B_i \setminus \bigcup_{j < i} B_j$, so sind die Mengen

$A_1, \dots, A_m$ paarweise disjunkte Zerlegungsmengen in X mit $\text{diam } A_i \leq \text{diam } S(x_i, \frac{\epsilon}{2}) \leq \epsilon$ und $\bigcup_{i=1}^m A_i = X$. Entfernt man von den Mengen

$A_1, \dots, A_m$ diejenigen, die leer sind, so erhält man durch geeignete Umnumerierung der verbleibenden A_i 's eine Zerlegung von X in $n_0 (\leq m)$ paarweise disjunkte nicht-leere Zerlegungsmengen $A_1, \dots, A_{n_0}$ mit $\text{diam } A_i \leq \epsilon$ für alle i . Jeder der Unterräume $A_1, \dots, A_{n_0}$ ist nicht-leer, kompakt, total-unzusammenhängend und als offener Unterraum auch in sich dicht. Durch weitere Zerlegung eines der A_i , z.B. von A_{n_0} , kann man

für jedes $m > n_0$ eine Zerlegung von X in genau m paarweise disjunkte nicht-leere Zerlegungsmengen gewinnen. Das sieht man z.B. folgendermaßen: A_{n_0} enthält unendlich viele Punkte; denn andernfalls wäre es nicht in sich dicht. Also gibt es $m - (n_0 - 1)$ verschiedene Punkte $y_{n_0}, \dots, y_m$ in A_{n_0} . Ist $r = \frac{1}{2} \min\{d(y_k, y_l) \mid k=n_0, \dots, m, l=n_0, \dots, m, k \neq l\}$, so gibt es nach 5.2.13 zu jedem y_k eine Zerlegungsmenge C_k in A_{n_0} mit

$y_k \in C_k \subset S(y_k, r)$. Definiert man

$$A'_i = \begin{cases} A_i & \text{für } i = 1, \dots, n_0 - 1 \\ C_i & \text{für } i = n_0, \dots, m - 1 \\ A_{n_0} \setminus \bigcup_{j < m} C_j & \text{für } i = m, \end{cases}$$

so erhält man eine Zerlegung von X in m paarweise disjunkte, nicht-leere Zerlegungsmengen $A'_1, \dots, A'_m$ mit $\text{diam } A'_i \leq \epsilon$.

(2) Wir konstruieren durch Induktion eine Folge (Z_n) von Zerlegungen von X und eine Folge (Z'_n) von Zerlegungen von X' . Wegen (1) gibt es eine Zahl n_1 und Zerlegungen $Z_1 = \{A_1, \dots, A_{n_1}\}$ von X und $Z'_1 = \{B_1, \dots, B_{n_1}\}$ von X' in jeweils n_1 paarweise disjunkte, nicht-leere Zerlegungsmengen mit Durchmesser $\leq \frac{1}{2}$. Jeder der Räume A_1 bzw. B_1 ist wieder nicht-leer, kompakt, total-unzusammenhängend und in sich dicht. Also gibt es nach (1) eine Zahl n_2 und für jedes A_i bzw. B_i eine Zerlegung $\{A_{i1}, \dots, A_{in_2}\}$ bzw. $\{B_{i1}, \dots, B_{in_2}\}$ in jeweils n_2 paarweise disjunkte, nicht-leere Zerlegungsmengen mit Durchmesser $\leq \frac{1}{4}$. Folglich ist $Z_2 = \{A_{i_1 i_2} \mid i_1 \in \{1, \dots, n_1\}, i_2 \in \{1, \dots, n_2\}\}$ bzw. $Z'_2 = \{B_{i_1 i_2} \mid i_1 \in \{1, \dots, n_1\}, i_2 \in \{1, \dots, n_2\}\}$ eine Zerlegung von X bzw. X' in jeweils $n_1 \cdot n_2$ paarweise disjunkte, nicht-leere Zerlegungsmengen mit Durchmesser $\leq \frac{1}{4}$. Seien $Z_r = \{A_{i_1 \dots i_r} \mid i_1 \in \{1, \dots, n_1\}, \dots, i_r \in \{1, \dots, n_r\}\}$ und $Z'_r = \{B_{i_1 \dots i_r} \mid i_1 \in \{1, \dots, n_1\}, \dots, i_r \in \{1, \dots, n_r\}\}$ bereits

definiert. Nach (1) existiert eine Zahl n_{r+1} und für jedes $A_{i_1 \dots i_r} \in \mathcal{Z}_r$ bzw. $B_{i_1 \dots i_r} \in \mathcal{Z}'_r$ eine Zerlegung $\{A_{i_1 \dots i_r 1}, \dots, A_{i_1 \dots i_r n_{r+1}}\}$ bzw. $\{B_{i_1 \dots i_r 1}, \dots, B_{i_1 \dots i_r n_{r+1}}\}$ in n_{r+1} paarweise disjunkte, nicht-leere Zerlegungsmengen mit Durchmesser $\leq \frac{1}{2^{r+1}}$. Somit ist $\mathcal{Z}_{r+1} = \{A_{i_1 \dots i_{r+1}} \mid i_v \in \{1, \dots, n_v\} \text{ für } v=1, \dots, r+1\}$ bzw. $\mathcal{Z}'_{r+1} = \{B_{i_1 \dots i_{r+1}} \mid i_v \in \{1, \dots, n_v\} \text{ für } v=1, \dots, r+1\}$ eine Zerlegung von $\underline{X}$ bzw. $\underline{X}'$ in $\prod_{i=1}^{r+1} n_i$ paarweise verschiedene, nicht-leere Zerlegungsmengen vom Durchmesser $\leq \frac{1}{2^{r+1}}$.

(3) Für jedes $x \in \underline{X}$ gibt es genau eine Folge (i_n) , so daß $x \in A_{i_1 \dots i_r}$ für jedes r gilt. Ist (i_n) die zu x gehörige Folge, so gibt es genau einen Punkt $f(x) \in \underline{X}'$, so daß $f(x) \in B_{i_1 \dots i_r}$ für jedes r gilt. Die durch $x \mapsto f(x)$ definierte Abbildung $f: \underline{X} \rightarrow \underline{X}'$ ist offenbar bijektiv. Zum Nachweis der Stetigkeit von f betrachte man ein $x \in \underline{X}$ und ein $\varepsilon > 0$. Ist $\frac{1}{2^r} < \varepsilon$ und ist (i_n) die zu x gehörige Folge, so gilt $\text{diam } B_{i_1 \dots i_r} < \varepsilon$. Also ist die Zerlegungsmenge $A_{i_1 \dots i_r}$ eine Umgebung von x mit $f[A_{i_1 \dots i_r}] = B_{i_1 \dots i_r} \subset S(f(x), \varepsilon)$. Folglich ist f stetig in x und somit stetig. Nach 4.2.19 ist $f: \underline{X} \rightarrow \underline{X}'$ ein topologischer Isomorphismus.

5.3.5 BEMERKUNG

Obige Charakterisierung deutet bereits an, daß das Cantorsche Diskontinuum $\underline{\mathbb{D}}$ nicht "ein Raum wie jeder andere" ist, sondern zumindest in der Theorie der kompakten Räume eine ausgezeichnete Rolle spielt. Wir werden später sehen, daß ein kompakter Raum genau dann total-unzusammenhängend ist, wenn er zu einem abgeschlossenen Teilraum von $\underline{\mathbb{D}}$ topologisch isomorph ist, und daß ein nicht-leerer metrischer Raum genau dann kompakt ist, wenn er stetiges Bild von $\underline{\mathbb{D}}$ ist. Zunächst zeigen wir, daß $[0,1]$ stetiges Bild von $\underline{\mathbb{D}}$ ist.

5.3.6 SATZ

Es existiert eine stetige Abbildung $f: \underline{\mathbb{D}} \rightarrow [0,1]$ von $\underline{\mathbb{D}}$ auf $[0,1]$.

Beweis:

Zu jedem $x \in \underline{\mathbb{D}}$ existiert genau eine Folge (x_n) in $\{0,2\}$ mit

$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$. Da sich jedes $y \in [0,1]$ in der Form $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n}$ mit $y_n \in \{0,1\}$ darstellen läßt, wird durch $x \mapsto (x_n) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}$ eine surjektive Abbildung $f: \mathbb{D} \rightarrow [0,1]$ definiert. Zum Nachweis der (gleichmäßigen) Stetigkeit von f genügt es, da $(\frac{1}{2^n})$ eine Nullfolge ist, zu zeigen, daß für jedes m und jedes $x \in \mathbb{D}$ und $y \in \mathbb{D}$ aus $d(x,y) < \frac{1}{3^m}$ stets $d(f(x), f(y)) \leq \frac{1}{2^m}$ folgt. Ist (x_n) die zu x gehörige Folge in $\{0,2\}$ und (y_n) die zu y gehörige Folge in $\{0,2\}$, so folgt aus $d(x,y) = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n - y_n}{3^n} \right| < \frac{1}{3^m}$ zunächst $x_n = y_n$ für $n = 1, \dots, m$ und somit $d(f(x), f(y)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^{n+1}} \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{2}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^m}$.

Der nächste Satz zeigt, daß viele Räume einen zum Cantorschen Diskontinuum topologisch isomorphen Raum als Teilraum besitzen und somit mindestens c Punkte enthalten.

5.3.7 SATZ

Jeder nicht-leere, in sich dichte, vollständige metrische Raum besitzt einen zum Cantorschen Diskontinuum topologisch isomorphen Teilraum.

Beweis:

Sei $\underline{X}$ nicht leer, in sich dicht und vollständig. Durch Induktion nach n definieren wir für jede endliche Folge $(i_1, \dots, i_n)$ in $\{0,2\}$ eine abgeschlossene Menge $A_{i_1 \dots i_n}$ in X mit $\text{int } A_{i_1 \dots i_n} \neq \emptyset$.

Induktionsanfang: Wähle zwei verschiedene Punkte x_1 und x_2 in $\underline{X}$, setze

$r_1 = \min \{1, \frac{d(x_1, x_2)}{3}\}$ und definiere $A_0 = \{x \in X \mid d(x_1, x) \leq r_1\}$ und

$A_2 = \{x \in X \mid d(x_2, x) \leq r_1\}$.

Induktionsschluß: Sei $A_{i_1 \dots i_n}$ bereits definiert. Wähle zwei Punkte

y_1 und y_2 in $\text{int } A_{i_1 \dots i_n}$, setze $r = \min \{\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{3}d(y_1, y_2)\}$,

$\frac{1}{2}d(y_1, X \setminus A_{i_1 \dots i_n}), \frac{1}{2}d(y_2, X \setminus A_{i_1 \dots i_n})\}$ und definiere $A_{i_1 \dots i_n 0} =$

$\{x \in X \mid d(y_1, x) \leq r\}$ und $A_{i_1 \dots i_n 2} = \{x \in X \mid d(y_2, x) \leq r\}$. Ist $x \in \mathbb{D}$

und (x_n) die zugehörige Folge in $\{0,2\}$, so gibt es nach 3.1.13 genau einen Punkt $f(x)$ in $\underline{X}$ mit $f(x) \in A_{x_1 \dots x_n}$ für jedes n . Ist $\underline{Y}$ der durch

$\{f(x) \mid x \in \mathbb{D}\}$ bestimmte Teilraum von $\underline{X}$, so wird durch $x \mapsto f(x)$ ein

topologischer Isomorphismus $f: \underline{\mathbb{D}} \rightarrow \underline{Y}$ definiert.

5.3.8 SATZ (vgl. auch Satz 3.4.5)

Ist $\underline{X}$ ein nicht-leerer, in sich dichter, vollständiger metrischer Raum, so gilt $\text{Card } X \geq c$.

5.3.9 SATZ

Ist $\underline{X}$ ein nicht-leerer, in sich dichter, kompakter metrischer Raum, so gilt $\text{Card } X = c$.

Bemerkenswert und sehr nützlich ist die Tatsache, daß jede stetige Abbildung von einem abgeschlossenen Teilraum von $\underline{\mathbb{D}}$ in einen beliebigen metrischen Raum stetig auf $\underline{\mathbb{D}}$ fortgesetzt werden kann. Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir einige Vorbereitungen:

5.3.10 LEMMA 1

Durch $d^*(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{3^n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{3^n}$ wird eine zu $d = d_E|_{\mathbb{D} \times \mathbb{D}}$ uniform äquivalente Metrik d^* auf $\mathbb{D}$ definiert.

Beweis:

Sind $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$ und $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{3^n}$ zwei verschiedene Punkte von $\mathbb{D}$ und gilt $m = \min\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \neq y_n\}$, so gilt $d^*(x, y) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3^{m-1}}$ und $d(x, y) \geq \frac{2}{3^m} - \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{1}{3^m}$. Somit gilt $d(x, y) \leq d^*(x, y) \leq 3d(x, y)$, woraus nach 2.2.8 die uniforme Äquivalenz von d und d^* folgt.

5.3.11 LEMMA 2

Sind x, y und y' Punkte von $\mathbb{D}$ mit $d^*(x, y) = d^*(x, y')$, so gilt $y = y'$.

Beweis:

Aus $d^*(x, y) = d^*(x, y')$ folgt $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y'_n|}{3^n}$. Wegen $|x_n - y_n| \in \{0, 2\}$ und $|x_n - y'_n| \in \{0, 2\}$ folgt hieraus $|x_n - y_n| = |x_n - y'_n|$ und somit $y_n = y'_n$ für alle n , d.h. $y = y'$.

5.3.12 LEMMA 3

Ist A eine nicht-leere, abgeschlossene Teilmenge von $(\mathbb{D}, d^*)$, so gibt es zu jedem $x \in \mathbb{D}$ genau einen Punkt $r(x)$ in A mit $d^*(x, r(x)) = \text{dist}(x, A)$. Die durch $x \mapsto r(x)$ definierte Abbildung $r: \underline{\mathbb{D}} \rightarrow \underline{A}$ ist stetig.

Beweis:

Nach 5.3.10 ist die Stetigkeit von $r: \mathbb{D} \rightarrow \underline{A}$ äquivalent zur Stetigkeit von $r: (\mathbb{D}, d^*) \rightarrow (A, d^*|A \times A)$; letzteres zeigen wir.

Die Existenz von $r(x)$ folgt wegen 5.3.10 aus 4.2.11, die Eindeutigkeit aus 5.3.11.

Zum Nachweis der Stetigkeit von $r: (\mathbb{D}, d^*) \rightarrow (A, d^*|A \times A)$ betrachte man eine gegen x konvergierende Folge (x_n) in $(\mathbb{D}, d^*)$. Würde die Folge $(r(x_n))$ nicht gegen $r(x)$ konvergieren, so gäbe es eine Teilfolge $(r(x_{n_i}))$, die in $(A, d^*|A \times A)$ gegen einen Punkt $a \neq r(x)$ konvergieren würde. Somit würde die Folge $(d^*(x_{n_i}, r(x_{n_i}))) = (\text{dist}(x_{n_i}, A))$ nach 1.3.8 gegen $d^*(x, a)$ und nach 5.3.2 gegen $\text{dist}(x, A)$ konvergieren, woraus $d^*(x, a) = \text{dist}(x, A)$ und somit $a = r(x)$ folgen würde, im Widerspruch zu $a \neq r(x)$.

5.3.13 THEOREM

Ist $\underline{A}$ ein abgeschlossener Teilraum von $\underline{D}$, so existiert zu jeder stetigen Abbildung $f: \underline{A} \rightarrow \underline{X}$ von $\underline{A}$ in einen beliebigen, nicht-leeren metrischen Raum eine stetige Fortsetzung $g: \underline{D} \rightarrow \underline{X}$.

Beweis:

Ist A leer, so ist die Behauptung trivial. Ist A nicht leer, so existiert nach 5.3.12 eine stetige Abbildung $r: \underline{D} \rightarrow \underline{A}$ mit $r(a) = a$ für alle $a \in A$. Folglich ist die Abbildung $g = f \circ r: \underline{D} \rightarrow \underline{X}$ eine stetige Fortsetzung von f .

5.3.14 AUFGABEN

Zeigen Sie:

(1) Sei $\sigma: \{0, 2\} \rightarrow \{0, 2\}$ die von der Identität verschiedene Bijektion, sei M eine Teilmenge von $\mathbb{N}$, und sei $f_M: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ die durch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{3^n} \quad \text{mit} \quad y_n = \begin{cases} x_n, & \text{falls } n \notin M \\ \sigma(x_n), & \text{falls } n \in M \end{cases} \quad \text{definierte Abbildung. Dann gilt:}$$

(a) $f_M: \underline{D} \rightarrow \underline{D}$ ist ein uniformer Isomorphismus

(b) $f_M \circ f_N = f_{(M \cup N) \setminus (M \cap N)}$

(c) $f_M \circ f_M$ ist die Identität auf $\underline{D}$

(d) die Folge $(f_{\{n\}})$ konvergiert gleichmäßig gegen die Identität auf $\underline{D}$

(e) ist (M_n) eine monoton wachsende Folge von Teilmengen von $\mathbb{N}$ und gilt $M = \bigcup \{M_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, so konvergiert die Folge (f_{M_n}) gleichmäßig gegen f_M

(f) es gibt uniforme Isomorphismen $f: \underline{D} \rightarrow \underline{D}$, die nicht von der Form

f_M sind. [Hinweis: Untersuchen Sie die Fixpunkte von f_M].

(2) Zu je zwei Punkten x und y von $\mathbb{D}$ existiert ein uniformer Isomorphismus $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ mit $f(x) = y$.

(3) Seien A und B nicht-leere, disjunkte, abgeschlossene Teilmengen von $(\mathbb{D}, d^*)$. Es gibt keinen Punkt x in $\mathbb{D}$ mit $\text{dist}(x, A) = \text{dist}(x, B)$.

(4) Jede gleichmäßig stetige Abbildung von einem beliebigen Teilraum von $\mathbb{D}$ in einen nicht-leeren, vollständigen metrischen Raum besitzt eine gleichmäßig stetige Fortsetzung auf $\mathbb{D}$.

5.4 DER ZERBRECHLICHE KEGEL $\mathbb{K}$

Das Cantorsche Diskontinuum erweist sich als wesentliches Hilfsmittel zur Konstruktion eines Teilraumes $\mathbb{K}$ von $\mathbb{R}^2$ mit sehr merkwürdigen Eigenschaften, die unseren naiven Vorstellungen arg widersprechen.

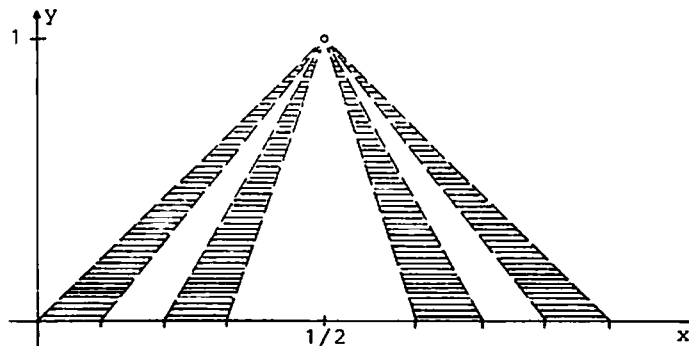
5.4.1 DEFINITION

Eine Folge (x_n) heißt *fast konstant*, wenn fast alle ihre Glieder übereinstimmen, d.h. wenn es ein n so gibt, daß aus $m \geq n$ stets $x_m = x_n$ folgt.

5.4.2 DEFINITION

Sei $D_1 = \{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \mid (x_n) \text{ ist eine fast konstante Folge in } \{0, 2\} \}$, und

sei $D_2 = \mathbb{D} \setminus D_1$. Für jedes $x \in D_1$ (bzw. $x \in D_2$) bezeichne S_x die Menge aller Punkte der Strecke von $(x, 0)$ nach $(\frac{1}{2}, 1)$, deren zweite Koordinate rational (bzw. irrational) ist. Der durch $\mathbb{K} = \bigcup_{x \in \mathbb{D}} S_x$ bestimmte Teilraum $\mathbb{K}$ von $\mathbb{R}^2$ heißt *zerbrechlicher Kegel*:



5.4.3 SATZ

Der zerbrechliche Kegel $\mathbb{K}$ ist zusammenhängend.

Beweis:

Sei A eine Zerlegungsmenge von $\mathbb{K}$ mit $(\frac{1}{2}, 1) \in A$. Für jedes $x \in \mathbb{D}$ sei A_x die Menge aller $r \in [0, 1]$, für die jeder Punkt (p, q) von S_x mit $q \geq r$ in A liegt, und $r_x = \inf A_x$. Da A offen ist und $(\frac{1}{2}, 1)$ enthält, gilt $r_x < 1$ für jedes $x \in \mathbb{D}$. Ist $\{x \in \mathbb{D} \mid r_x = 0\}$ dicht in $\mathbb{D}$, so gilt $A = \mathbb{K}$ wegen der Abgeschlossenheit von A in $\mathbb{K}$. Es verbleibt zu zeigen, daß eine Alternative nicht möglich ist. Wäre $\{x \in \mathbb{D} \mid r_x = 0\}$ nicht dicht in $\mathbb{D}$, so gäbe es eine nicht-leere offene Teilmenge B in $\mathbb{D}$ mit $r_x > 0$ für jedes $x \in B$. Wir folgern zunächst

$r_x \in \mathbb{P}$ für jedes $x \in B \cap D_1$ und $r_x \in \mathbb{Q}$ für jedes $x \in B \cap D_2$.

Sei $x \in B \cap D_1$, und es gälte $r_x \in \mathbb{Q}$. Dann wäre $(p^*, r_x) \in S_x$, p^* geeignet gewählt, aufgrund der Definition von r_x und der Abgeschlossenheit von A . Da A offen ist, existierte eine Umgebung U von (p^*, r_x) mit $U \subset A$; wegen $r_x > 0$ gäbe es dann ein $(p, q) \in S_x$ mit $q < r_x$ im Widerspruch zur Definition von r_x . Es gilt also $r_x \in \mathbb{P}$. Analog zeigt man $r_x \in \mathbb{Q}$ für jedes $x \in B \cap D_2$.

Definiert man $B_r = \{r\}$ für $r \in B \cap D_1$ und $B_r = \{x \in B \cap D_2 \mid r_x = r\}$ für jedes $r \in \mathbb{Q} \cap]0, 1[$, so wäre B Vereinigung der abzählbar vielen Mengen B_r mit $r \in (B \cap D_1) \cup (\mathbb{Q} \cap]0, 1[)$.

Als nicht-leerer offener Teilraum des vollständigen Raumes $\mathbb{D}$ wäre B topologisch vollständig und somit von 2. Kategorie. Daher existierte ein $r_0 \in D_1 \cup (\mathbb{Q} \cap]0, 1[)$ derart, daß B_{r_0} nicht nirgends dicht in B und somit nicht nirgends dicht in $\mathbb{D}$ wäre. Insbesondere gälte $B_{r_0} \subset D_2$, andernfalls wäre B_{r_0} einelementig. Wäre C eine nicht-leere offene Teilmenge von $\mathbb{D}$ mit $C \subset \text{cl } B_{r_0}$, so gäbe es ein $x_0 \in C \cap D_1$, da D_1 dicht in $\mathbb{D}$ ist. Folglich wäre der Punkt von S_{x_0} , dessen zweite Koordinate gleich r_0 ist, sowohl Berührungspunkt von A als auch von $\mathbb{K} \setminus A$, im Widerspruch dazu, daß A Zerlegungsmenge von $\mathbb{K}$ ist. Folglich ist jede $(\frac{1}{2}, 1)$ enthaltende und damit jede nicht-leere Zerlegungsmenge von $\mathbb{K}$ gleich $\mathbb{K}$, d.h. $\mathbb{K}$ ist zusammenhängend.

5.4.4 SATZ

Der durch $X = \mathbb{K} \setminus \{(\frac{1}{2}, 1)\}$ bestimmte Teilraum X von $\mathbb{K}$ ist total-unzusammenhängend.

Beweis:

Sei A ein zusammenhängender Teilraum von X . Sind x und y zwei verschiedene Punkte von $\mathbb{D}$, so gibt es eine Zerlegungsmenge B von $\mathbb{D}$ mit $x \in B$ und $y \notin B$. Folglich ist $C = \bigcup_{b \in B} S_b^*$ eine Zerlegungsmenge von X mit

$S_x^* \subset C$ und $S_y^* \subset X \setminus C$; dabei sei $S_u^* = S_u \setminus \{(\frac{1}{2}, 1)\}$.

Da A ganz in C oder in $X \setminus C$ liegt, kann A mit höchstens einer der Mengen S_x^* und S_y^* Punkte gemeinsam haben. Somit existiert ein w in $\mathbb{D}$ mit $A \subset S_w^*$. Da S_w^* total-unzusammenhängend ist, ist A höchstens einelementig.

5.4.5 AUFGABE

Zeigen Sie, daß der durch $X = \mathbb{K} \setminus \{(\frac{1}{2}, 1)\}$ bestimmte Teilraum $\underline{X}$ von $\underline{\mathbb{K}}$ folgende Eigenschaften hat:

- (1) $\underline{X}$ ist uniform zusammenhängend.
- (2) $\underline{X}$ erfüllt nicht die Bedingung (c) von 5.2.13.