§ 4 TOTAL BESCHRÄNKTE UND KOMPAKTE METRISCHE RÄUME

STUDIERHINWEISE ZU § 4

In § 4 werden total beschränkte und kompakte metrische Räume untersucht. Kompaktheit erweist sich als eine der angenehmsten Eigenschaften metrischer Räume. U.a. wird sich zeigen, daß viele der aus der Analysis bekannten angenehmen Eigenschaften von $[0,1]$ sich nicht nur auf beliebige abgeschlossene und beschränkte Teilräume des $\mathbb{R}^n$, sondern darüber hinaus auf alle kompakten metrischen Räume X übertragen lassen, z.B. ist jede stetige Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ bereits gleichmäßig stetig, und die Menge $f[X]$ ist nicht nur beschränkt, sondern besitzt (für $X \neq \emptyset$) darüber hinaus ein größtes und ein kleinstes Element. Dem Leser sei empfohlen, sich insbesondere mit den zahlreichen Charakterisierungen kompakter Räume zu beschäftigen. Wir werden diese in § 6 benutzen, um eine vollständige Übersicht über alle kompakten metrischen Räume zu erlangen.

Dem Abschnitt über kompakte metrische Räume ist ein kurzer Abschnitt über total beschränkte metrische Räume vorangestellt. Der Grund ist folgender: Metrische Räume erweisen sich (4.2.2) genau dann als kompakt, wenn sie sowohl vollständig als auch total beschränkt sind, und da vollständige Räume bereits sorgfältig studiert wurden, liegt es nahe, zunächst den noch fehlenden anderen Aspekt der Kompaktheit, nämlich totale Beschränktheit, separiert zu studieren. Dadurch erhalten wir eine bessere Einsicht in die Natur kompakter metrischer Räume. Ansonsten sind total beschränkte metrische Räume von geringerer Bedeutung. Festhalten sollte man allerdings, daß die total beschränkten Räume gerade die Teilräume kompakter metrischer Räume sind (4.2.5).

4.0 EINFÜHRUNG

Aus der Analysis ist bekannt, daß kompakte (= beschränkte und abgeschlossene) Teilmengen X von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^n$ besonders angenehme Eigenschaften haben. So ist jede stetige Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ bereits gleichmäßig stetig (was für die Integralrechnung wichtig ist), und die Menge $\{f(x) \mid x \in X\}$ ist nicht nur beschränkt, sondern besitzt (für $X \neq \emptyset$) darüber hinaus ein größtes und ein kleinstes Element (was sich für diverse Probleme als extrem nützlich erweist). Kompaktheit erweist sich als eine erheblich stärkere und angenehmere Eigenschaft als Vollständigkeit. So ist $\mathbb{R}$ zwar vollständig, hat aber keine der eben erwähnten angenehmen Eigenschaften kompakter Räume, z.B. ist die durch $x \mapsto x^2$ definierte Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zwar stetig, aber nicht gleichmäßig stetig, die durch $x \mapsto x$ definierte Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zwar gleichmäßig stetig, aber nicht beschränkt und die durch $x \mapsto (x^2+1)^{-1}$ definierte Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zwar gleichmäßig stetig und beschränkt, aber $f[\mathbb{R}] =]0,1[$ hat kein kleinstes Element. Diese Beispiele deuten bereits an, um wieviel Kompaktheit angenehmer ist als Vollständigkeit. Selbstverständlich gelten alle Folgerungen aus der Vollständigkeit (Banachscher Fixpunktsatz, Bairescher Kategoriensatz etc.) auch für Kompaktheit. Gäbe es nicht einige sehr wichtige Räume (z.B. $\mathbb{R}^n$), die

zwar vollständig aber nicht kompakt sind, so hätten wir vollständige Räume keineswegs so ausführlich studiert, sondern uns gleich auf das Studium kompakter Räume konzentriert.

Die Frage liegt nahe: Was fehlt den vollständigen Räumen an der Kompaktheit? Die aus der Analysis bekannte Charakterisierung vollständiger und kompakter Teilräume X des $\mathbb{R}^n$ deutet die Antwort an: X ist genau dann kompakt (= beschränkt und abgeschlossen), wenn X vollständig (= abgeschlossen) und beschränkt ist. Leider ist Beschränktheit keine uniforme Eigenschaft, denn nach 2.2.9(5) ist jede Metrik zu einer beschränkten Metrik uniform äquivalent. Es gibt jedoch eine etwas stärkere uniforme Eigenschaft "totale Beschränktheit", die obiges Problem löst: Ein metrischer Raum erweist sich genau dann als kompakt, wenn er vollständig und total beschränkt ist.

Wie die vollständigen, so haben auch die total beschränkten metrischen Räume eine Reihe angenehmer Eigenschaften.

Insbesondere wird sich zeigen, daß ihre "Größe" in Grenzen bleibt. Wir werden deshalb zunächst totale Beschränktheit isoliert studieren und erst später Vollständigkeit hinzufügen und damit Kompaktheit untersuchen.

4.1 TOTAL BESCHRÄNKTE METRISCHE RÄUME

4.1.1 DEFINITION

Sei X ein metrischer Raum, und sei r eine reelle Zahl. Eine Teilmenge A von X heißt r -dicht in X , wenn $\text{dist}(x,A) \leq r$ für jedes $x \in X$ gilt. Eine endliche, r -dichte Teilmenge von X heißt r -Netz in X . Der Raum X heißt *total beschränkt*, wenn $X = \emptyset$ ist oder für jedes $r > 0$ ein r -Netz in X existiert.

4.1.2 BEMERKUNG

- (1) A ist genau dann 0 -dicht in X , wenn A dicht in X ist.
- (2) Die totale Beschränktheit eines Raumes X läßt sich folgendermaßen veranschaulichen: Wie klein auch die Reichweite $r > 0$ eines bestimmten Senders sein mag, so ist es doch stets möglich, durch Errichten von nur endlich vielen Sendeanlagen (in je einem Punkt von X) jeden Punkt von X zu erreichen. Diese Interpretation zeigt auch, daß die Bedingung der totalen Beschränktheit sehr natürlich ist.

4.1.3 BEISPIELE

- (1) Ein diskreter Raum ist genau dann total beschränkt, wenn er end-

lich ist.

(2) Wie wir in 4.1.12 beweisen werden, ist ein Teilraum des $\mathbb{R}^n$ genau dann total beschränkt, wenn er beschränkt ist.

(3) Ein X -stacheliger Igel ist genau dann total beschränkt, wenn X endlich ist.

(4) $B(X)$ ist genau dann total beschränkt, wenn $X = \emptyset$ gilt.

4.1.4 SATZ (Charakterisierung der totalen Beschränktheit)

Für jeden metrischen Raum X sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) X ist total beschränkt.

(b) Jede Folge in X besitzt eine Cauchy-Teilfolge.

(c) Jede Folge in X besitzt einen Verdichtungspunkt in $\text{Compl } X$.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Sei (x_n) eine Folge in X . Durch Induktion nach m werden Teilmengen A_m von X mit $\text{diam } A_m \leq \frac{2}{m}$ und Teilfolgen (x_n^m) von (x_n) in A_m folgendermaßen konstruiert: Induktionsanfang: Ist $\{y_1, \dots, y_r\}$ ein 1-Netz in X , so gibt es unter den r Mengen $K(y_i, 1) = \{x \in X \mid d(y_i, x) \leq 1\}$ wenigstens eine Menge $K(y_{i_0}, 1) = A_1$, die unendlich viele Glieder von (x_n) und somit eine Teilfolge (x_n^1) von (x_n) enthält. Induktionsschluß: Seien für festes m die Menge A_m und die Folge (x_n^m) definiert. Ist $Z = \{z_1, \dots, z_s\}$ ein $\frac{1}{m+1}$ -Netz in X , so gibt es unter den s Mengen $K(z_i, \frac{1}{m+1}) = \{x \in X \mid d(z_i, x) \leq \frac{1}{m+1}\}$ wenigstens eine Menge A_{m+1} , die unendlich viele Glieder der Folge (x_n^m) und somit eine Teilfolge (x_n^{m+1}) von (x_n^m) enthält. Die Folge (x_n^n) ist eine Teilfolge von (x_n) , und für jedes m gilt $\text{diam}\{x_n^n \mid n \geq m\} \leq \text{diam}\{x_n^m \mid n \in \mathbb{N}\} \leq \text{diam } A_m \leq \frac{2}{m}$. Also ist (x_n^n) Cauchy-Folge in X .

(b) $\Rightarrow$ (c): Ist (y_n) Cauchy-Teilfolge von (x_n) , so konvergiert (y_n) in $\text{Compl } X$ gegen einen Punkt y . Folglich ist y Verdichtungspunkt von (x_n) in $\text{Compl } X$.

(c) $\Rightarrow$ (a): Wäre X nicht total beschränkt, so gäbe es für ein geeignetes $r > 0$ kein r -Netz in X . Also könnte man durch Induktion eine Folge (x_n) in X derart konstruieren, daß aus $n < m$ stets $d(x_n, x_m) > r$ folgte. Eine derartige Folge (x_n) hätte keinen Verdichtungspunkt in $\text{Compl } X$.

4.1.5 SATZ

Ist $f: X \rightarrow Y$ eine gleichmäßig stetige Abbildung von X auf Y , und ist X total beschränkt, so ist Y total beschränkt.

Beweis:

Ist (y_n) eine Folge in $\underline{Y}$, so existiert wegen der Surjektivität von f eine Folge (x_n) in $\underline{X}$ mit $(f(x_n)) = (y_n)$. Die Folge (x_n) besitzt eine Cauchy-Teilfolge (x_{n_i}) in $\underline{X}$. Nach 3.1.4 ist $(f(x_{n_i})) = (y_{n_i})$ eine Cauchy-Teilfolge von (y_n) in $\underline{Y}$.

4.1.6 BEMERKUNG

Nach 4.1.5 ist jeder zu einem total beschränkten Raum uniform isomorphe Raum ebenfalls total beschränkt. Die Eigenschaft eines metrischen Raumes, total beschränkt zu sein, ist also eine uniforme Eigenschaft. Sie ist aber keine topologische Eigenschaft, denn die Räume $\underline{\mathbb{R}}$ und $\underline{]0,1[}$ sind zwar topologisch isomorph, aber $\underline{]0,1[}$ ist total beschränkt, und $\underline{\mathbb{R}}$ ist nicht total beschränkt.

4.1.7 SATZ

Jeder total beschränkte Raum ist beschränkt.

Beweis:

Ist A ein 1-Netz in $\underline{X}$ mit $\text{diam } A = r$, so gilt offenbar $\text{diam } X \leq r+2 < \infty$.

4.1.8 BEMERKUNG

Ist $\underline{X}$ total beschränkt, so ist jeder zu $\underline{X}$ uniform isomorphe Raum beschränkt. Die Umkehrung gilt nicht. Ist X eine unendliche Menge, so ist der X -stachlige Igel $\underline{Y}$ zwar nicht total beschränkt, aber jeder zu $\underline{Y}$ uniform isomorphe Raum ist beschränkt. Um letzteres einzusehen, betrachte man einen uniformen Isomorphismus $f: (Y, d) \rightarrow (Z, d')$. Wäre (Z, d') unbeschränkt, so wäre die Menge $\{d'(f(O), z) \mid z \in Z\}$ ebenfalls unbeschränkt. Also gäbe es zu jedem n ein z_n in Z mit $d'(f(O), z_n) \geq n$. Zu jedem n gäbe es einen Punkt (x_n, r_n) in Y mit $f((x_n, r_n)) = z_n$. Für festes n betrachte man die $n + 1$ Punkte

$0, (x_n, \frac{r_n}{n}), (x_n, \frac{2r_n}{n}), \dots, (x_n, r_n)$ in Y . Wegen $d'(f(O), f(x_n, r_n)) \geq n$ gäbe

es unter ihnen zwei, die wir mit p_n und q_n bezeichnen, so daß

$d(p_n, q_n) = \frac{r_n}{n} \leq \frac{1}{n}$ und $d'(f(p_n), f(q_n)) \geq 1$. Also wären die Folgen (p_n)

und (q_n) in $\underline{Y}$ benachbart, die Folgen $(f(p_n))$ und $(f(q_n))$ in $\underline{Z}$ aber

nicht, im Widerspruch zur gleichmäßigen Stetigkeit von f . Tatsächlich haben wir sogar etwas mehr bewiesen: Jede gleichmäßig stetige Abbildung $f: \underline{Y} \rightarrow \underline{Z}$ von einem unendlich-stachligen Igel in einen beliebigen metrischen Raum ist beschränkt (d.h. $f[Y]$ ist beschränkt in $\underline{Z}$). Ein entsprechender Satz gilt für total beschränkte Räume:

4.1.9 FOLGERUNG

Ist $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ gleichmäßig stetig und ist $\underline{X}$ total beschränkt, so ist $f[\underline{X}]$ beschränkt in $\underline{Y}$.

Beweis:

$f[\underline{X}]$ ist nach 4.1.5 total beschränkt und somit nach 4.1.7 beschränkt.

4.1.10 SATZ

Für Teilräume $\underline{A}$ von $\underline{X}$ gilt:

- (1) Ist $\underline{X}$ total beschränkt, so ist $\underline{A}$ total beschränkt.
- (2) Ist $\underline{A}$ dicht in $\underline{X}$ und ist $\underline{A}$ total beschränkt, so ist $\underline{X}$ total beschränkt.

Beweis:

(1) Jede Folge in $\underline{A}$ ist Folge in $\underline{X}$ und besitzt somit eine Cauchy-Folge.

(2) Jedes r -Netz in $\underline{A}$ ist ein r -Netz in $\underline{X}$, denn ist $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ ein r -Netz in $\underline{A}$, so gilt für jedes $x \in \underline{X}$ $x \in \text{cl} A = \text{cl}(K(b_1, r) \cup \dots \cup K(b_n, r)) = \text{cl} K(b_1, r) \cup \dots \cup \text{cl} K(b_n, r)$. Also gibt es ein i mit $x \in \text{cl} K(b_i, r)$, woraus $d(b_i, x) \leq r$ folgt. [Hierbei ist $K(b, r) = \{x \in A \mid d(b, x) \leq r\}$ gesetzt.]

4.1.11 SATZ

Äquivalent sind:

- (a) $\underline{X}$ ist total beschränkt.
- (b) $\text{Compl } \underline{X}$ ist total beschränkt.

Beweis:

Der Satz folgt aus 4.1.10, weil $\underline{X}$ ein dichter Unterraum von $\text{Compl } \underline{X}$ ist.

4.1.12 BEISPIELE

Sei $W = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \leq k\}$ ein Würfel der Kantenlänge $2k$ in $\mathbb{R}^n$. Für jedes $r > 0$ gibt es ein m mit $\frac{1}{m} \leq r$. Folglich ist $B = \{(\frac{r_1}{m}, \dots, \frac{r_n}{m}) \mid r_i \in \{-km, -km + 1, \dots, +km\}$ für alle $i\}$ bzgl. der Maximum-Metrik d_M ein r -Netz in W . Somit ist W bzgl. d_M und somit auch bzgl. der uniform äquivalenten Euklidischen Metrik d_E total beschränkt. Wegen 4.1.7 und 4.1.10(1) folgt hieraus, daß ein Teilraum des $\mathbb{R}^n$ genau dann total beschränkt ist, wenn er beschränkt ist.

4.1.13 DEFINITION

Ein metrischer Raum heißt *separabel*, wenn er eine höchstens abzählbare,

dichte Teilmenge enthält.

4.1.14 SATZ

Jeder total beschränkte metrische Raum ist separabel.

Beweis:

Ist B_n ein $\frac{1}{n}$ -Netz in $\underline{X}$, so ist $B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ dicht in $\underline{X}$ und als Vereinigung abzählbar vieler endlicher Mengen höchstens abzählbar.

4.1.15 BEMERKUNG

Ein separabler Raum ist nicht notwendig total beschränkt, wie der Raum $\mathbb{R}$ zeigt. Wir werden aber später sehen, daß ein metrischer Raum genau dann separabel ist, wenn er zu einem total beschränkten Raum topologisch isomorph ist. Separabilität ist eine topologische Eigenschaft.

4.1.16 DEFINITION

$\text{Card } X$ bezeichne die Kardinalzahl einer Menge X . Insbesondere sei $c = \text{Card } \mathbb{R}$ und $\aleph_0 = \text{Card } \mathbb{N}$.

4.1.17 SATZ

Ist $\underline{X}$ separabel, so gilt $\text{Card } X \leq c$.

Beweis:

Sei A eine höchstens abzählbare, dichte Teilmenge von $\underline{X}$. Zu jedem $x \in X$ gibt es eine Folge (x_n) in A , die gegen x konvergiert. Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwerts folgt aus $x \neq y$ stets $(x_n) \neq (y_n)$. Also hat X höchstens so viele Elemente, wie es Folgen in A gibt, d.h.

$$\text{Card } X \leq \text{Card } A^{\text{Card } \mathbb{N}} \leq \aleph_0^{\aleph_0} = c.$$

4.1.18 FOLGERUNG

Ist $\underline{X}$ total beschränkt, so gilt $\text{Card } X \leq c$.

4.1.19 AUFGABEN

(1) Konstruieren Sie zwei total beschränkte metrische Räume, die topologisch isomorph, aber nicht uniform isomorph sind. [Hinweis: Vergleichen Sie z.B. $[-1, +1] \setminus \{0\}$ und $[-1, +1] \setminus [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$].

(2) Zeigen Sie: Sind $\underline{A}$ und $\underline{B}$ total beschränkte Teilräume von $\underline{X}$, so sind auch $\underline{A} \cap \underline{B}$ und $\underline{A} \cup \underline{B}$ total beschränkte Teilräume von $\underline{X}$.

(3) Zeigen Sie, daß $\underline{X}$ genau dann total beschränkt ist, wenn $\underline{X}$ keinen

zu $\mathbb{N}$ uniform isomorphen Teilraum besitzt.

- (4) Hyp $\underline{X}$ ist genau dann total beschränkt, wenn $\underline{X}$ total beschränkt ist.
(5) $\text{Bair}(X)$ ist genau dann total beschränkt, wenn X endlich ist.

4.1.20 AUFGABEN

Eine Teilmenge A von $\underline{X}$ heißt zerstreut, falls gilt:

$\inf \{d(a,b) \mid a \in A \text{ und } b \in A \text{ und } a \neq b\} > 0$. Zeigen Sie:

- (1) $\underline{X}$ ist genau dann total beschränkt, wenn jede zerstreute Teilmenge von $\underline{X}$ endlich ist.
(2) $\underline{X}$ ist genau dann separabel, wenn jede zerstreute Teilmenge von X höchstens abzählbar ist.
(3) A ist genau dann zerstreut, wenn $\underline{A}$ zu einem diskreten metrischen Raum uniform isomorph ist. [Vergl. 2.2.12(5)].
(4) Jede zerstreute Menge in $\underline{X}$ ist abgeschlossen in $\underline{X}$.

4.1.21 AUFGABEN

Zeigen Sie:

- (1) Die metrischen Räume $\mathbb{R}^n$ sind separabel, aber nicht total beschränkt.
(2) Die metrischen Räume l_1 und l_2 sind separabel, aber nicht total beschränkt.
(3) Der metrische Raum l_∞ ist vollständig, aber nicht separabel.
(4) Ein diskreter metrischer Raum ist genau dann separabel, wenn er höchstens abzählbar ist.
(5) $\underline{B}(X)$ ist genau dann separabel, wenn X endlich ist.
(6) Ein Teilraum eines separablen Raumes ist separabel.
(7) Ein dichter Teilraum von $\underline{X}$ ist genau dann separabel, wenn $\underline{X}$ separabel ist.

4.2. KOMPAKTE METRISCHE RÄUME

4.2.1 DEFINITION

Ein metrischer Raum $\underline{X}$ heißt *kompakt*, wenn jede Folge in $\underline{X}$ einen Verdichtungspunkt hat.

Bemerkung:

Kompaktheit ist offensichtlich eine topologische Eigenschaft im Gegensatz zur Vollständigkeit und totalen Beschränktheit, die nur uniforme Eigenschaften sind. Es ist um so bemerkenswerter, daß die beiden letzten Eigenschaften zusammengenommen Kompaktheit charakterisieren.

4.2.2 SATZ (Uniforme Charakterisierung der Kompaktheit)

Äquivalent sind:

- (a) $\underline{X}$ ist kompakt.
- (b) $\underline{X}$ ist vollständig und total beschränkt.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): $\underline{X}$ ist vollständig, denn nach 3.1.8 ist jeder Verdichtungspunkt einer Cauchy-Folge bereits Grenzwert der Cauchy-Folge. $\underline{X}$ ist nach 4.1.4 total beschränkt, denn jeder Verdichtungspunkt einer Folge in $\underline{X}$ ist natürlich auch Verdichtungspunkt dieser Folge in $\text{Compl } \underline{X}$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Wegen der Vollständigkeit von $\underline{X}$ gilt $\underline{X} = \text{Compl } \underline{X}$. Wegen der totalen Beschränktheit von $\underline{X}$ hat jede Folge in $\underline{X}$ einen Verdichtungspunkt in $\text{Compl } \underline{X} = \underline{X}$.

4.2.3 BEISPIELE

- (1) Ein diskreter Raum $\underline{X}$ ist genau dann kompakt, wenn X endlich ist.
- (2) Jeder metrische Raum $\underline{X}$ mit endlichem X ist kompakt.
- (3) Ein Teilraum $\underline{X}$ des $\mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn er beschränkt und abgeschlossen ist.
- (4) Ein X -stacheliger Igel ist genau dann kompakt, wenn X endlich ist.
- (5) $\underline{B}(X)$ ist genau dann kompakt, wenn $X = \emptyset$ gilt.

4.2.4 SATZ

Ist $\underline{A}$ Teilraum eines kompakten Raumes $\underline{X}$, so sind äquivalent:

- (a) $\underline{A}$ ist kompakt.
- (b) $\underline{A}$ ist abgeschlossen in $\underline{X}$.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Jeder kompakte Teilraum von $\underline{X}$ ist vollständig, also nach 3.1.10 abgeschlossen in $\underline{X}$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Jeder abgeschlossene Teilraum von $\underline{X}$ ist nach 3.1.10 vollständig und nach 4.1.10 total beschränkt, also kompakt.

Beachten Sie, daß für die Implikation (a) $\Rightarrow$ (b) die Kompaktheit von $\underline{X}$ nicht benötigt wurde. Vergl. 3.1.12(3).

4.2.5 SATZ (Charakterisierung total beschränkter Räume mittels Kompaktheit)

Äquivalent sind:

- (a) $\underline{X}$ ist total beschränkt.
- (b) $\text{Compl } \underline{X}$ ist kompakt.

(c) X ist ein Teilraum eines kompakten Raumes.

(d) X ist uniform isomorph zu einem Teilraum eines kompakten Raumes.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Ist X total beschränkt, so ist $\text{Compl } X$ nach 5.1.11 total beschränkt und vollständig, also kompakt.

(b) $\Rightarrow$ (c): X ist ein Teilraum von $\text{Compl } X$.

(c) $\Rightarrow$ (d): Trivial.

(d) $\Rightarrow$ (a): Jeder Teilraum eines kompakten Raumes ist als Teilraum eines total beschränkten Raumes ebenfalls total beschränkt. Jeder zu einem total beschränkten Raum uniform isomorphe Raum ist nach 4.1.5 ebenfalls total beschränkt.

4.2.6 BEMERKUNG

Ein Raum, der zu einem Teilraum eines kompakten Raumes topologisch isomorph ist, ist i. allg. nicht total beschränkt, denn totale Beschränktheit ist, wie wir gesehen haben, keine topologische Eigenschaft, z.B. ist $\mathbb{R}$ zwar nicht total beschränkt, aber zu dem Teilraum $]0,1[$ des kompakten Raumes $[0,1]$ topologisch isomorph. Der folgende Satz gibt einen Hinweis darauf, wie die Räume beschaffen sind, die zu einem Teilraum eines kompakten Raumes topologisch isomorph sind.

4.2.7 SATZ

Ist X topologisch isomorph zu einem Teilraum eines kompakten Raumes, so ist X separabel.

Beweis:

Jeder Teilraum eines kompakten Raumes ist total beschränkt und somit separabel. Da Separabilität eine topologische Eigenschaft ist (vgl. 4.1.15), ist auch X separabel.

4.2.8 BEMERKUNG

Wir werden in 6.4.8 zeigen, daß obiger Satz die separablen Räume charakterisiert, d.h. wir werden die Äquivalenz der folgenden drei Eigenschaften metrischer Räume nachweisen:

(a) X ist separabel.

(b) X ist topologisch isomorph zu einem total beschränkten Raum.

(c) X ist topologisch isomorph zu einem Teilraum eines kompakten Raumes.

Im Augenblick können wir nur (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) zeigen. Für die fehlende Implikation fehlen uns noch die Mittel.

4.2.9 BEMERKUNG

Kompakte Räume haben eine Fülle angenehmer Eigenschaften. Als nächstes wollen wir zeigen, daß ihre "uniforme Struktur" bereits durch ihre "topologische Struktur" bestimmt ist, d.h. daß je zwei topologisch isomorphe kompakte Räume bereits uniform isomorph sind. Insbesondere lassen sich in einem kompakten Raum alle uniformen Begriffe - wie z.B. Benachbartsein von Mengen, Benachbartsein von Folgen, gleichmäßige Umgebung - durch topologische Begriffe - wie abgeschlossene Menge, Berührungspunkt einer Menge, Grenzwert einer Folge usf. - ausdrücken. Dem Leser sei empfohlen, sich an geeigneten Beispielen klarzumachen, daß Entsprechendes weder für vollständige noch für total beschränkte Räume gilt.

4.2.10 SATZ (Existenz konvergenter Teilfolgenpaare)

Sind (x_n) und (y_n) Folgen in einem kompakten Raum X , so gibt es eine konvergente Teilfolge (x_{n_i}) von (x_n) derart, daß die entsprechende Teilfolge (y_{n_i}) von (y_n) ebenfalls konvergiert.

Beweis:

(x_n) besitzt einen Verdichtungspunkt x und somit eine gegen x konvergierende Teilfolge (x_{n_i}) . Die entsprechende Teilfolge (y_{n_i}) von (y_n) konvergiert i. allg. nicht, besitzt aber ebenfalls einen Verdichtungspunkt y und somit eine gegen y konvergierende Teilfolge $(y_{n_{i_j}})$.

Die entsprechende Teilfolge $(x_{n_{i_j}})$ von (x_{n_i}) konvergiert gegen x . Also sind $(x_{n_{i_j}})$ und $(y_{n_{i_j}})$ entsprechende Teilfolgen von (x_n) bzw. (y_n) , die beide konvergieren.

4.2.11 SATZ

Sind A und B nicht-leere Teilmengen eines kompakten Raumes X , so gibt es Punkte $x \in \text{cl}A$ und $y \in \text{cl}B$ mit $\text{dist}(A,B) = d(x,y)$.

Beweis:

Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es Elemente $a_n \in A$ und $b_n \in B$ mit $d(a_n, b_n) \leq \text{dist}(A,B) + \frac{1}{n}$. Nach 4.2.10 gibt es entsprechende Teilfolgen (a_{n_i}) von (a_n) und (b_{n_i}) von (b_n) , die konvergieren. Offensichtlich gilt $x = \lim_{i \rightarrow \infty} a_{n_i} \in \text{cl}A$ und $y = \lim_{i \rightarrow \infty} b_{n_i} \in \text{cl}B$ sowie $d(x,y) = \lim_{i \rightarrow \infty} d(a_{n_i}, b_{n_i}) \leq \lim_{i \rightarrow \infty} (\text{dist}(A,B) + \frac{1}{n_i}) = \text{dist}(A,B)$. Andererseits folgt

aus $\text{dist}(\text{cl}A, \text{cl}B) = \text{dist}(A, B)$ unmittelbar $\text{dist}(A, B) \leq d(x, y)$. Somit gilt $\text{dist}(A, B) = d(x, y)$.

4.2.12 SATZ

Sind A und B Teilmengen eines kompakten Raumes, so sind äquivalent:

- (a) A und B sind benachbart.
- (b) $\text{cl}A \cap \text{cl}B \neq \emptyset$, d.h. A und B haben einen gemeinsamen Berührungspunkt.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Aus $\text{dist}(A, B) = 0$ folgt, daß weder A noch B leer sind und nach 4.2.11, daß Punkte $x \in \text{cl}A$ und $y \in \text{cl}B$ mit $d(x, y) = \text{dist}(A, B) = 0$ existieren, woraus $x = y \in \text{cl}A \cap \text{cl}B$ folgt.

(b) $\Rightarrow$ (a) gilt offenbar immer.

4.2.13 SATZ

Sind A und B Teilmengen eines kompakten Raumes, so sind äquivalent:

- (a) B ist gleichmäßige Umgebung von A .
- (b) $\text{cl}A \subset \text{int} B$.
- (c) B ist Umgebung von $\text{cl}A$.

Beweis:

B gleichmäßige Umgebung von $A \iff A$ und $X \setminus B$ sind nicht benachbart
 $\iff \text{cl}A \cap \text{cl}(X \setminus B) = \emptyset \iff \text{cl}A \subset X \setminus \text{cl}(X \setminus B) = \text{int} B \iff B$ ist Umgebung von $\text{cl}A$.

4.2.14 SATZ

Sind (x_n) und (y_n) Folgen in einem kompakten Raum, so sind äquivalent:

- (a) (x_n) und (y_n) sind benachbart.
- (b) Je zwei entsprechende Teilfolgen (x_{n_i}) und (y_{n_i}) von (x_n) und (y_n) haben entsprechende Teilfolgen $(x_{n_{i_j}})$ und $(y_{n_{i_j}})$ mit gemeinsamem Grenzwert.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Nach 4.2.10 haben (x_{n_i}) und (y_{n_i}) entsprechende konvergente Teilfolgen. Diese sind ebenfalls benachbart, haben somit denselben Grenzwert.

(b) $\Rightarrow$ (a): Wären (x_n) und (y_n) nicht benachbart, so gäbe es eine positive reelle Zahl r und ein Paar entsprechende Teilfolgen (x_{n_i}) und (y_{n_i}) von (x_n) bzw. (y_n) mit $d(x_{n_i}, y_{n_i}) \geq r$ für jedes i . Dann hätten (x_{n_i}) und (y_{n_i}) offenbar kein Paar entsprechender Teilfolgen mit demselben Grenzwert, im Widerspruch zu (b).

4.2.15 THEOREM (Gleichmäßige Stetigkeit stetiger Abbildungen mit kompaktem Definitionsbereich)

Jede stetige Abbildung $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ von einem kompakten Raum $\underline{X}$ in einen beliebigen Raum $\underline{Y}$ ist gleichmäßig stetig.

Beweis:

Sind A und B benachbart in $\underline{X}$, so haben sie einen gemeinsamen Berührungspunkt x . Wegen der Stetigkeit von f ist $f(x)$ gemeinsamer Berührungspunkt von $f[A]$ und $f[B]$. Folglich sind $f[A]$ und $f[B]$ benachbart in $\underline{Y}$. Nach 2.1.6 folgt hieraus die gleichmäßige Stetigkeit von f .

4.2.16 BEMERKUNG

Die kompakten Räume sind nicht die einzigen Räume mit obiger Eigenschaft. So ist jede stetige Abbildung - ja sogar jede Abbildung - von einem diskreten Raum in einen beliebigen Raum gleichmäßig stetig.

4.2.17 THEOREM

Jeder topologische Isomorphismus $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ von einem kompakten Raum $\underline{X}$ auf einen beliebigen Raum $\underline{Y}$ ist ein uniformer Isomorphismus.

Beweis:

Kompaktheit ist eine topologische Eigenschaft. Also ist mit $\underline{X}$ auch $\underline{Y}$ kompakt. Somit sind nach dem Satz über die gleichmäßige Stetigkeit stetiger Abbildungen mit kompaktem Definitionsbereich (4.2.15) sowohl $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ als auch $f^{-1}: \underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ gleichmäßig stetig, also uniforme Isomorphismen.

4.2.18 THEOREM (Stetige Bilder kompakter Räume sind kompakt)

Ist $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ eine stetige Abbildung von $\underline{X}$ auf $\underline{Y}$, so ist mit $\underline{X}$ auch $\underline{Y}$ kompakt.

Beweis:

Zu jeder Folge (y_n) in $\underline{Y}$ gibt es wegen der Surjektivität von f eine Folge (x_n) in $\underline{X}$ mit $(y_n) = (f(x_n))$. Wegen der Kompaktheit von $\underline{X}$ hat (x_n) einen Verdichtungspunkt x in $\underline{X}$. Wegen der Stetigkeit von f ist $f(x)$ Verdichtungspunkt von $(f(x_n)) = (y_n)$ in $\underline{Y}$. Also ist $\underline{Y}$ kompakt.

4.2.19 SATZ

Ist $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ eine Abbildung zwischen metrischen Räumen und ist $\underline{X}$ kompakt, so sind äquivalent:

- (a) $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ ist bijektiv und stetig.
- (b) $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ ist ein topologischer Isomorphismus.
- (c) $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ ist ein uniformer Isomorphismus.

Beweis:

Die Äquivalenz von (b) und (c) wurde in 4.2.17 bewiesen. Es genügt somit zu zeigen, daß (b) aus (a) folgt. Sei $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ stetig und bijektiv. Ist A abgeschlossen in $\underline{X}$, so ist $\underline{A}$ nach 4.2.4 kompakt. Also ist $f[\underline{A}]$ nach 4.2.18 ein kompakter Teilraum von $\underline{Y}$, $f[A]$ somit abgeschlossen in $\underline{Y}$ (vergl. 3.1.12(3)). Das Urbild jeder abgeschlossenen Teilmenge von $\underline{X}$ unter der Abbildung $f^{-1}: \underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ ist somit abgeschlossen in $\underline{Y}$. Folglich ist $f^{-1}: \underline{Y} \rightarrow \underline{X}$ stetig und somit $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ ein topologischer Isomorphismus.

4.2.20 AUFGABEN

(1) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Bedingungen für in sich dichte metrische Räume $\underline{X}$:

- (a) $\underline{X}$ ist kompakt.
- (b) In $\underline{X}$ haben je zwei benachbarte Teilmengen einen gemeinsamen Berührungspunkt.
- (c) Jede stetige Abbildung $f: \underline{X} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$ ist gleichmäßig stetig.

(2) Zeigen Sie, daß für jeden Teilraum $\underline{X} = (X, d)$ von $\underline{\mathbb{R}}$ folgende Aussagen äquivalent sind:

- (a) $\underline{X}$ ist kompakt.
- (b) Für jede zu d_E topologisch äquivalente Metrik d' auf X ist (X, d') vollständig.
- (c) Für jede zu d_E topologisch äquivalente Metrik d' auf X ist (X, d') total beschränkt.
- (d) Für jede zu d_E topologisch äquivalente Metrik d' auf X ist (X, d') beschränkt.

4.2.21 BEMERKUNG

Allgemeiner als 4.2.20(2) gilt für jeden metrischen Raum $\underline{X}$, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

- (a) $\underline{X}$ ist kompakt.
- (b) Jeder topologische Isomorphismus $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ ist ein uniformer Isomorphismus.
- (c) Jeder zu $\underline{X}$ topologisch isomorphe Raum ist vollständig.
- (d) Jeder zu $\underline{X}$ topologisch isomorphe Raum ist total beschränkt.
- (e) Jeder zu $\underline{X}$ topologisch isomorphe Raum ist beschränkt.

Die Äquivalenz der Bedingungen (a) - (e) folgt relativ leicht aus dem folgenden Satz, den wir nicht weiter benötigen und deshalb auch nicht beweisen: Ist (A, d_A) abgeschlossener Teilraum eines metrischen Raumes

(X, d) , so läßt sich jede zu d_A topologisch äquivalente Metrik auf A zu einer zu d topologisch äquivalenten Metrik auf X fortsetzen. Dieser Satz wurde 1930 von Felix Hausdorff bewiesen (Fundamenta Mathematica 16, S. 353 - 360).

4.2.22 AUFGABEN

Zeigen Sie:

(1) Endliche Vereinigungen und beliebige Durchschnitte kompakter Teilräume von $\underline{X}$ sind kompakt.

(2) Ist A eine nicht-leere, kompakte Menge in $\underline{X}$, so gibt es Punkte a und a' in A mit $\text{diam } A = d(a, a')$.

(3) (a) Keiner der metrischen Räume $\underline{\mathbb{R}^n}$, l_∞, l_1, l_2 ist kompakt.

(b) In $\mathbb{R}^n$ ist jede abgeschlossene Kugel kompakt.

(c) In keinem der Räume l_∞, l_2, l_1 existiert eine abgeschlossene Kugel mit positivem Radius.

(d) In jedem der Räume l_∞, l_2, l_1 ist jede kompakte Menge nirgends dicht.

(e) Für $(x_n) \in l_1$ ist $\{(y_n) \in l_1 \mid |y_n| \leq |x_n| \text{ für alle } n\}$ kompakt in l_1 .

(4) $\text{Bair}(X)$ ist genau dann kompakt, wenn X endlich ist.

[Vergl. 3.1.14(8) und 4.1.19(5)].

4.3 TOPOLOGISCHE CHARAKTERISIERUNG KOMPAKTER RÄUME

Aus Theorem 4.2.18 folgt sofort, daß jede stetige Abbildung $f: \underline{X} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$ von einem kompakten Raum $\underline{X}$ nach $\underline{\mathbb{R}}$ beschränkt ist. Erstaunlicherweise ist diese - aus der Analysis bekannte - wichtige Eigenschaft kompakter Räume zur Kompaktheit äquivalent. Der folgende Satz enthält eine Reihe weiterer zur Kompaktheit äquivalenter topologischer Eigenschaften metrischer Räume. Die aus der Analysis bekannte Überdeckungseigenschaft wird anschließend behandelt.

4.3.1 DEFINITION

x heißt *Häufungspunkt* von A in $\underline{X}$, falls x ein Berührungspunkt von $A \setminus \{x\}$ in $\underline{X}$ ist.

4.3.2 THEOREM

Äquivalent sind:

(a) $\underline{X}$ ist kompakt.

- (b) Jede stetige Abbildung $f: \underline{X} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$ ist beschränkt.
- (c) Für jede stetige Abbildung $f: \underline{X} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$ hat die Menge $f[X]$ ein größtes und ein kleinstes Element, oder sie ist leer.
- (d) Jede unendliche Teilmenge von $\underline{X}$ hat einen Häufungspunkt.
- (e) Jede monoton fallende Folge $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ nicht-leerer, abgeschlossener Teilmengen von $\underline{X}$ hat einen nicht-leeren Durchschnitt (Cantorsche Durchschnittseigenschaft; vgl. auch 3.1.13).

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Nach 4.2.18 ist $f[X]$ ein kompakter und somit beschränkter Teilraum von $\underline{\mathbb{R}}$.

(b) $\Rightarrow$ (c): Wäre $f[X]$ eine beschränkte, nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{R}$ ohne ein größtes Element, so wäre $r = \sup f[X]$ ein nicht zu $f[X]$ gehörender Berührungspunkt von $f[X]$. Somit wäre die durch $x \mapsto (f(x) - r)^{-1}$ definierte Abbildung $g: \underline{X} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$ stetig und unbeschränkt, im Widerspruch zu (b). Also hat $f[X]$, falls ungleich $\emptyset$, ein größtes Element. Entsprechend folgt die Existenz eines kleinsten Elementes.

(c) $\Rightarrow$ (d): Hat A keinen Häufungspunkt in $\underline{X}$, so ist A abgeschlossen in $\underline{X}$, und jede Abbildung $f: \underline{A} \rightarrow \underline{Y}$ von $\underline{A}$ in einen beliebigen metrischen Raum $\underline{Y}$ ist stetig. Hätte eine unendliche Menge A keinen Häufungspunkt in $\underline{X}$, so gäbe es eine Abbildung $f: \underline{A} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$ derart, daß $f[A]$ nach oben unbeschränkt wäre. Nach dem Fortsetzbarkeitstheorem für $\underline{\mathbb{R}}$ (2.3.7) ließe sich f zu einer stetigen Abbildung $g: \underline{X} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$ fortsetzen. Die Menge $g[X]$ hätte kein größtes Element, im Widerspruch zu (c).

(d) $\Rightarrow$ (e): Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wähle man ein Element $a_n \in A_n$. Ist die Menge $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ endlich, so enthält sie ein Element, das in unendlich vielen A_n und somit in $\bigcap A_n$ liegt. Andernfalls besitzt A einen Häufungspunkt x . Wegen $\{a_n \mid n \geq m\} \subset A_m$ ist x Häufungspunkt und somit Element von jedem A_m . Also gilt $x \in \bigcap A_m$.

(e) $\Rightarrow$ (a): Ist (x_n) eine Folge in $\underline{X}$ und definiert man $A_m = \text{cl}\{x_n \mid n \geq m\}$, so ist (A_m) eine monoton fallende Folge nicht-leerer, abgeschlossener Teilmengen von $\underline{X}$. Ist x ein Element von $\bigcap A_m$, so ist x Verdichtungspunkt von (x_n) , denn jede Umgebung von x trifft jede der Mengen $\{x_n \mid n \geq m\}$ und enthält somit unendlich viele Glieder von (x_n) .

4.3.3 DEFINITION

Eine Menge $\mathcal{U}$ von Teilmengen von X heißt Überdeckung von X , falls $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$ gilt. $\mathcal{U}$ heißt offen in X , wenn jedes $U \in \mathcal{U}$ offen in $\underline{X}$ ist.

4.3.4 THEOREM (Satz von Heine-Borel)

Äquivalent sind:

- (a) X ist kompakt.
- (b) Jede abzählbare offene Überdeckung U von X enthält eine endliche Überdeckung $V \subset U$ von X .
- (c) Jede offene Überdeckung U von X enthält eine endliche Überdeckung $V \subset U$ von X .

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Es sei $U = \{U_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare offene Überdeckung von X , und wir nehmen an, für alle $n \in \mathbb{N}$ wäre $X \neq \bigcup_{i=1}^n U_i$. Dann kann man durch $A_n := X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i$ eine monoton fallende Folge nichtleerer, abgeschlossener Teilmengen von X definieren, deren Durchschnitt wegen

(a) nach 4.3.2(e) nicht leer ist, also

$$\emptyset \neq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i \right) = X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i=1}^n U_i = X \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i.$$

Das widerspricht jedoch der Voraussetzung, daß U die Menge X überdeckt.

(b) $\Rightarrow$ (a): Wäre für eine absteigende Folge (A_n) nichtleerer abgeschlossener Teilmengen von X $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$, so wäre mit $U_n = X \setminus A_n$

$U = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine höchstens abzählbar offene Überdeckung von X .

Nach Voraussetzung existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\bigcup_{i=1}^n U_i = X$, im Widerspruch zu

$$\emptyset = X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i = \bigcap_{i=1}^n A_i = A_n.$$

(c) $\Rightarrow$ (b) ist trivial.

(b) $\Rightarrow$ (c): Wegen (b) $\Rightarrow$ (a) ist X nach 4.1.14 separabel. Für eine höchstens abzählbare, dichte Teilmenge B von X und für eine offene Überdeckung U von X betrachtet man die höchstens abzählbare Menge

$$I = \{(b,n) \in B \times \mathbb{N} \mid \exists U \in U: S(b, \frac{1}{n}) \subset U\}.$$

Für jedes $i = (b,n) \in I$ sei eine Menge $U_i \in U$ mit $S(b, \frac{1}{n}) \subset U_i$ ausgewählt. Für jedes $x \in X$ findet man ein $U \in U$ und ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$S(x, \frac{1}{m}) \subset U \text{ und, weil } B \text{ dicht ist, auch ein } b \in B \text{ mit } b \in S(x, \frac{1}{2m}) \subset U, \text{ also } S(b, \frac{1}{2m}) \subset S(x, \frac{1}{m}) \subset U.$$

Folglich ist $i = (b, \frac{1}{2m}) \in I$, und es gilt $x \in S(b, \frac{1}{2m}) \subset U_i$.

$\{U_i \mid i \in I\}$ ist also eine abzählbare Teilüberdeckung von U , aus der man voraussetzungsgemäß eine endliche Überdeckung auswählen kann.

4.3.5 BEMERKUNG

Über die Größe eines kompakten Raumes haben wir sehr präzise Vorstel-

lungen. Jeder endliche Raum ist kompakt. Jeder kompakte Raum hat nach 4.1.8 höchstens $c = \text{Card } \mathbb{R}$ Punkte. Im nächsten Kapitel werden wir zeigen, daß jeder in sich dichte kompakte Raum genau c Punkte hat.

4.3.6 AUFGABEN

Zeigen Sie:

- (1) $\underline{X}$ ist genau dann kompakt, wenn $\underline{X}$ keinen abgeschlossenen Teilraum besitzt, der zu $\underline{N}$ topologisch isomorph ist.
- (2) $\underline{X}$ ist genau dann kompakt, wenn für jede stetige Abbildung $f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ die Menge $f[\underline{X}]$ abgeschlossen in $\underline{Y}$ ist.
- (3) $\underline{X}$ ist genau dann kompakt, wenn für jede Menge A von abgeschlossenen Teilmengen von $\underline{X}$ aus $\bigcap A = \emptyset$ die Existenz einer endlichen Menge $B \subset A$ mit $\bigcap B = \emptyset$ folgt.
- (4) Ist $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung eines kompakten metrischen Raumes $\underline{X}$, so existiert eine positive reelle Zahl r derart, daß für jede Teilmenge A von $\underline{X}$ mit $\text{diam } A \leq r$ ein $U \in \mathcal{U}$ mit $A \subset U$ existiert (Lebesguescher Überdeckungssatz).
- (5) Seien $\underline{X}$ kompakt und F eine Menge stetiger Abbildungen von $\underline{X}$ nach $\underline{\mathbb{R}}$ mit folgenden Eigenschaften:
 - (a) aus $f \in F$ und $g \in F$ folgt $f \cdot g \in F$
 - (b) zu jedem $x \in \underline{X}$ existiert eine Umgebung U von x in $\underline{X}$ und ein $f \in F$ mit $f(y) = 0$ für jedes $y \in U$.Dann enthält F die konstante Abbildung von $\underline{X}$ nach $\underline{\mathbb{R}}$ mit Wert 0.
- (6) Ist $\underline{X}$ einem Teilraum von $\underline{Y}$ metrisch isomorph, ist $\underline{Y}$ einem Teilraum von $\underline{X}$ metrisch isomorph und ist $\underline{X}$ kompakt, so sind $\underline{X}$ und $\underline{Y}$ metrisch isomorph.
Ohne die Kompaktheit von $\underline{X}$ gilt obige Folgerung nicht.