

§ 2 ABBILDUNGEN ZWISCHEN METRISCHEN RÄUMEN, STETIGKEIT UND GLEICHMÄSSIGE STETIGKEIT

STUDIERHINWEISE ZU § 2

Ebenso wie in der Linearen Algebra Beziehungen zwischen Vektorräumen und Eigenschaften von Vektorräumen sehr häufig mit Hilfe von Homomorphismen untersucht werden, lassen sich Beziehungen zwischen metrischen Räumen und Eigenschaften metrischer Räume oft vorteilhaft mit Hilfe geeigneter Abbildungen untersuchen. Im Gegensatz zur Linearen Algebra erweisen sich jedoch, wie aus der Analysis bekannt, für das Studium metrischer Räume zwei verschiedene Sorten von Abbildungen als interessant und nützlich: die stetigen und die gleichmäßig stetigen.

In 2.1 werden diese beiden Abbildungsarten definiert und charakterisiert, einfache Eigenschaften und Beispiele werden untersucht. Kurz: es wird ein wesentliches Handwerkszeug für den gesamten weiteren Kurs bereitgestellt. Je souveräner es gehandhabt wird, desto leichter ist das Verständnis der folgenden Kursteile. Vor allem wichtig sind die Charakterisierungssätze 2.1.2, 2.1.4 und 2.1.6.

2.2 ist von ganz anderer Natur. Hier geht es nicht um technische Hilfsmittel, sondern um eine Lösung der grundsätzlicheren (philosophisch attraktiven) Frage nach der "wesentlichen Gleichheit" zweier metrischer Räume bzw. zweier Metriken auf derselben Trägermenge. Wie wir sehen, kann diese Frage mit Hilfe von Abbildungen ohne jede Mystik einfach und präzise beantwortet werden. Entsprechend den zwei Sorten uns interessierender Abbildungen gelangen wir allerdings zu zwei verschiedenen Lösungen: der uniformen Isomorphie metrischer Räume (und der uniformen Äquivalenz von Metriken) auf der einen Seite, der topologischen Isomorphie metrischer Räume (und der topologischen Äquivalenz von Metriken) auf der anderen Seite (2.2.1). Während die ebenfalls definierte metrische Isomorphie eine vergleichsweise unbedeutende Rolle spielt, sind obige Isomorphiebegriffe wesentlich für das Verständnis dessen, was Topologie ist. Wie im Laufe des Kurses immer deutlicher werden wird, ist eine Metrik auf einer Menge X nur ein *Hilfsmittel*, um eine geeignete topologische bzw. uniforme "Struktur" auf X zu beschreiben. Im Verlaufe des weiteren Kurses sollte das Verständnis und das Gefühl dafür, was eine topologische Eigenschaft bzw. eine uniforme Eigenschaft (2.2.7) ist, soweit wachsen, daß wir uns im 7. Paragraphen von den nur als (allerdings sehr nützliches) Hilfsmittel dienenden Krücken der Metrik schließlich ganz befreien und uns dem Studium von topologischen, uniformen und Nachbarschafts-Räumen zuwenden können (vergl. Topologie I und II).

Wiederum von anderer Natur ist 2.3. Dieser Absatz enthält wesentliche Ergebnisse über die Fortsetzbarkeit (gleichmäßig) stetiger Abbildungen. Die Beweise sollen natürlich verstanden werden, können jedoch anschließend ohne großen Schaden wieder vergessen werden.

2.0 EINFÜHRUNG

Auf einer Menge X gibt es i. allg. sehr viele verschiedene Metriken. So sind auf $\mathbb{R}^2$ die diskrete Metrik d_D , die Euklidische Metrik d_E , die Maximum-Metrik d_M und die Summen-Metrik d_S voneinander verschieden, denn es gilt $d_D((0,0), (4,3)) = 1$, $d_E((0,0), (4,3)) = 5$,
 $d_M((0,0), (4,3)) = 4$, $d_S((0,0), (4,3)) = 7$.

Aber bereits im vorigen Kapitel haben wir darauf hingewiesen, daß die

Unterschiede zwischen den Metriken d_E , d_M und d_S unwesentlich sind: Teilmengen sind genau dann benachbart bzgl. d_E , wenn sie benachbart bzgl. d_M (oder d_S) sind, eine Folge konvergiert genau dann gegen einen Punkt bzgl. d_E , wenn sie bzgl. d_M (oder d_S) gegen diesen Punkt konvergiert, eine Menge ist genau dann offen bzgl. d_E , wenn sie offen bzgl. d_M (oder d_S) ist usf. Hingegen ist die diskrete Metrik d_D wesentlich von den drei anderen Metriken verschieden, z.B. ist die Menge $\mathbb{Q}^2$ bzgl. d_D sowohl offen als auch abgeschlossen, aber bzgl. jeder der drei anderen Metriken weder offen noch abgeschlossen. In 2.2 werden wir dem zunächst noch vagen Begriff der "wesentlichen Gleichheit" von Metriken einen präzisen Sinn geben. Darüber hinaus werden wir definieren, wann zwei beliebige metrische Räume im wesentlichen gleich sind. Als entscheidendes Hilfsmittel zur Untersuchung dieser Fragen erweisen sich die Begriffe der stetigen und der gleichmäßig stetigen Abbildungen, die aus der Analysis bereits bekannt sind. Diese Abbildungen werden in 2.1 definiert und charakterisiert. Wie im weiteren Verlauf dieses Kurses deutlich werden wird, stellen sie ein geeignetes Werkzeug zur Untersuchung metrischer Räume dar (analog der Untersuchung von Vektorräumen und Moduln mit Hilfe linearer Abbildungen). Viele Probleme lassen sich am leichtesten mit Hilfe (gleichmäßig) stetiger Abbildungen formulieren und lösen. Dabei spielen Abbildungen in besonders einfach gebaute und wohlbekannte Räume, insbesondere in den eindimensionalen Euklidischen Raum $\underline{\mathbb{R}} = (\mathbb{R}, d_E)$ und den durch das abgeschlossene Einheitsintervall $I = [0,1]$ bestimmten Teilraum $\underline{I} = (I, d_E)$ von $\underline{\mathbb{R}}$ eine ausgezeichnete Rolle. Sie werden es uns später ermöglichen, die Struktur vieler metrischer Räume in besonders einfacher Weise zu beschreiben. Wie wir in den sehr wichtigen Sätzen des Abschnitts 2.3 sehen werden, lassen sich derartige Abbildungen $\underline{X} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$ bzw. $\underline{X} \rightarrow \underline{I}$ z.B. dadurch gewinnen, daß man Abbildungen, die nur auf einer abgeschlossenen Teilmenge von $\underline{X}$ definiert sind, geeignet "fortsetzt".

2.1 STETIGKEIT UND GLEICHMÄSSIGE STETIGKEIT, DEFINITION, CHARAKTERISIERUNG, BEISPIELE

Seien $\underline{X} = (X, d)$, $\underline{X}' = (X', d')$ und $\underline{X}'' = (X'', d'')$ metrische Räume; $f: \underline{X} \rightarrow \underline{X}'$ und $g: \underline{X}' \rightarrow \underline{X}''$ Abbildungen; $x, y, \dots$ Elemente von $\underline{X}$.

2.1.1 DEFINITION

Die Abbildung $f: \underline{X} \rightarrow \underline{X}'$ heißt *stetig* in x , wenn für jede Teilmenge A von $\underline{X}$, die x als Berührungspunkt hat, $f(x)$ Berührungspunkt von $f[A]$ in $\underline{X}'$ ist.

2.1.2 SATZ (Charakterisierung der Stetigkeit in einem Punkt)

Für jedes $x \in X$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) f ist stetig in x .
- (b) Für jede Umgebung U von $f(x)$ in X' ist $f^{-1}[U]$ Umgebung von x in X .
- (c) Für jede Folge (x_n) in X , die gegen x konvergiert, konvergiert die Folge $(f(x_n))$ in X' gegen $f(x)$.
- (d) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in X (d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon)$.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (d): Sei $\epsilon > 0$. Sei $B := X' \setminus S(f(x), \epsilon)$ und $A := f^{-1}[B]$. Wäre x Berührungspunkt von A , so wäre $f(x)$ nach (a) Berührungspunkt von $f[A] \subset B$, was offenbar nicht der Fall ist. Also ist x kein Berührungspunkt von A . Somit existiert ein $\delta > 0$ mit $S(x, \delta) \cap A = \emptyset$. Hieraus folgt $f[S(x, \delta)] \subset S(f(x), \epsilon)$, also (d).

(d) $\Rightarrow$ (b): Ist U Umgebung von $f(x)$, so gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $S(f(x), \epsilon) \subset U$. Nach (d) gibt es ein $\delta > 0$ mit $f[S(x, \delta)] \subset S(f(x), \epsilon)$. Folglich gilt $S(x, \delta) \subset f^{-1}[U]$, und $f^{-1}[U]$ ist Umgebung von x .

(b) $\Rightarrow$ (c): Ist U Umgebung von $f(x)$, so ist $f^{-1}[U]$ nach (b) Umgebung von x . Also liegen fast alle Glieder von (x_n) in $f^{-1}[U]$. Da aus $x_m \in f^{-1}[U]$ offenbar $f(x_m) \in U$ folgt, liegen fast alle Glieder von $(f(x_n))$ in U . Somit konvergiert $(f(x_n))$ gegen $f(x)$.

(c) $\Rightarrow$ (a): Ist x Berührungspunkt von A , so gibt es eine Folge (a_n) in A , die gegen x konvergiert. Folglich konvergiert $(f(a_n))$ nach (c) gegen $f(x)$. Somit ist $f(x)$ Berührungspunkt von $f[A]$.

2.1.3 DEFINITION

$f: X \rightarrow X'$ heißt stetig, wenn f in jedem $x \in X$ stetig ist.

2.1.4 SATZ (Charakterisierung der Stetigkeit)

Äquivalent sind:

- (a) f ist stetig.
- (b) Für jede offene Teilmenge A von X' ist $f^{-1}[A]$ offen in X .
- (c) Für jede abgeschlossene Teilmenge A von X' ist $f^{-1}[A]$ abgeschlossen in X .

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Ist A offen in X' , so ist A Umgebung jedes ihrer Punkte. Nach (a) und 2.1.2 ist $f^{-1}[A]$ Umgebung jedes ihrer Punkte, also offen in X .

(b) $\Rightarrow$ (c): Ist A abgeschlossen in X' , so ist $B = X' \setminus A$ offen in X' . Nach (b) ist $f^{-1}[B]$ offen in X , also $f^{-1}[A] = X \setminus f^{-1}[B]$ abgeschlossen in X .

(c) $\Rightarrow$ (a): Sei x Berührungspunkt von A in X . Wäre $f(x)$ kein Berührungspunkt

von $f[A]$ in $\underline{X}'$, so gälte $x \notin f^{-1}[\text{cl}(f[A])] \supset A$. Nach (c) wäre $f^{-1}[\text{cl}(f[A])]$ abgeschlossen, also x kein Berührungspunkt von A . Das widerspricht der Voraussetzung. Somit ist $f(x)$ Berührungspunkt von $f[A]$. Folglich ist f gemäß 2.1.2 stetig in x . Diese Überlegung gilt für alle $x \in X$, also ist f stetig.

2.1.5 DEFINITION

$f: \underline{X} \rightarrow \underline{X}'$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn für je zwei benachbarte Mengen A und B in $\underline{X}$ die Mengen $f[A]$ und $f[B]$ in $\underline{X}'$ benachbart sind.

2.1.6 SATZ (Charakterisierung der gleichmäßigen Stetigkeit)

Äquivalent sind:

- (a) f ist gleichmäßig stetig.
- (b) Für jede gleichmäßige Umgebung U einer Menge A in $\underline{X}'$ ist $f^{-1}[U]$ eine gleichmäßige Umgebung von $f^{-1}[A]$ in $\underline{X}$.
- (c) Für je zwei benachbarte Folgen (x_n) und (y_n) in $\underline{X}$ sind $(f(x_n))$ und $(f(y_n))$ benachbart in $\underline{X}'$.
- (d) $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X \forall y \in X (d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \epsilon)$.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (c): Sind $(f(x_n))$ und $(f(y_n))$ nicht benachbart, so gibt es nach 1.3.18 eine unendliche Teilmenge M von $\mathbb{N}$, so daß die Mengen $\{f(x_m) | m \in M\}$ und $\{f(y_m) | m \in M\}$ nicht benachbart sind. Nach (a) sind dann auch die Mengen $\{x_m | m \in M\}$ und $\{y_m | m \in M\}$ nicht benachbart. Folglich sind (x_n) und (y_n) nicht benachbart.

(c) $\Rightarrow$ (d): Ist (d) nicht erfüllt, so gibt es ein $\epsilon > 0$ und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ Elemente x_n und y_n in X mit $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ und $d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \epsilon$. So gebildete Folgen (x_n) und (y_n) sind benachbart, aber $(f(x_n))$ und $(f(y_n))$ sind nicht benachbart. Also ist (c) nicht erfüllt.

(d) $\Rightarrow$ (b): Ist U gleichmäßige Umgebung von A in $\underline{X}'$, so gilt $\epsilon = \text{dist}(A, X' \setminus U) > 0$. Nach (d) existiert $\delta > 0$, so daß aus $d(x,y) < \delta$ stets $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$ folgt. Somit gilt für $x \in f^{-1}[A]$ und $y \in X \setminus f^{-1}[U] = f^{-1}[X' \setminus U]$ stets $d(x,y) \geq \delta$, d.h. $\text{dist}(f^{-1}[A], X \setminus f^{-1}[U]) \geq \delta > 0$. Folglich ist $f^{-1}[U]$ gleichmäßige Umgebung von $f^{-1}[A]$ in $\underline{X}$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Sind $f[A]$ und $f[B]$ nicht benachbart, so ist $U = X' \setminus f[B]$ eine gleichmäßige Umgebung von $f[A]$. Nach (b) ist $f^{-1}[U]$ eine gleichmäßige Umgebung von $f^{-1}[f[A]]$. Wegen $A \subset f^{-1}[f[A]]$ und $f^{-1}[U] = X \setminus f^{-1}[f[B]] \subset X \setminus B$ ist $X \setminus B$ gleichmäßige Umgebung von A . Also sind A und B nicht benachbart.

2.1.7 SATZ (Eigenschaften (gleichmäßig) stetiger Funktionen)

(1) Ist f Lipschitz-stetig, d.h. gilt

$\exists r > 0 \quad \forall x \in X \quad \forall y \in X \quad d'(f(x), f(y)) \leq r d(x, y)$, so ist $f: \underline{X} \rightarrow \underline{X}'$ gleichmäßig stetig.

(2) Ist $f: \underline{X} \rightarrow \underline{X}'$ gleichmäßig stetig, so ist $f: \underline{X} \rightarrow \underline{X}'$ stetig.

(3) Sind $f: \underline{X} \rightarrow \underline{X}'$ und $g: \underline{X}' \rightarrow \underline{X}''$ (gleichmäßig) stetig, so ist $g \circ f: \underline{X} \rightarrow \underline{X}''$ (gleichmäßig) stetig.

(4) Ist $\underline{X}$ Teilraum von $\underline{Y}$, so ist die Einbettung $\underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ gleichmäßig stetig.

(5) Ist $f: \underline{X} \rightarrow \underline{X}'$ (gleichmäßig) stetig, so ist für jeden Teilraum $\underline{Y}$ von $\underline{X}$ die Einschränkung $f|_{\underline{Y}}: \underline{Y} \rightarrow \underline{X}'$ von f auf $\underline{Y}$ (gleichmäßig) stetig.

(6) Ist $f: \underline{X} \rightarrow \underline{X}'$ (gleichmäßig) stetig und ist $\underline{Y}$ ein Teilraum von $\underline{X}'$ mit $f[\underline{X}] \subset \underline{Y}$, so ist die durch f induzierte Abbildung $\underline{Y}|f: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ (gleichmäßig) stetig.

Beweis:

(1) Seien $A, B \subset X$ benachbart, also $\text{dist}(A, B) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Dann ist } \text{dist}(f[A], f[B]) &= \inf\{d'(f(a), f(b)) \mid a \in A, b \in B\} \\ &\leq r \cdot \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\} \\ &= 0, \end{aligned}$$

also $\text{dist}(f[A], f[B]) = 0$.

(2) Ist $A \subset \underline{X}$ und $x \in X$ Berührungspunkt von A , so ist $\text{dist}(x, A) = 0$, also auch $\text{dist}(f(x), f[A]) = 0$, d.h. $f(x)$ ist Berührungspunkt von $f[A]$.

(3) Wir zeigen: f, g gleichmäßig stetig $\Rightarrow g \circ f$ gleichmäßig stetig.

Seien $A, B \subset \underline{X}$ benachbart. Dann sind auch $f[A]$ und $f[B]$ benachbart und somit auch $g[f[A]]$ und $g[f[B]]$. Analog zeigt man: f, g stetig $\Rightarrow g \circ f$ stetig.

(4) folgt aus (1).

(5) folgt mit (3) aus (4).

(6) folgt aus 1.2.31(4) (i) und (ii).

2.1.8 BEISPIELE

(1) Eine gleichmäßig stetige Abbildung ist i.allg. nicht Lipschitz-stetig. Sind z.B. d_D die diskrete Metrik und d_E die Euklidische Metrik auf $\mathbb{R}$, so ist die Identität $\text{id}_{\mathbb{R}}: (\mathbb{R}, d_D) \rightarrow (\mathbb{R}, d_E)$ gleichmäßig stetig, aber für jedes $r > 0$ gilt: $d_E(0, r+1) = r+1 > r = r \cdot d_D(0, r+1)$.

(2) Eine stetige Abbildung ist i.allg. nicht gleichmäßig stetig. So ist die durch $f(x) = x^2$ definierte Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zwar stetig, aber nicht gleichmäßig stetig. Letzteres sieht man z.B. so: die Folgen (n) und $(n + \frac{1}{n})$ sind benachbart, die Folgen (n^2) und $((n + \frac{1}{n})^2)$ jedoch nicht.

2.1.9 DEFINITION

- (1) $\text{inv}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ist die durch $x \mapsto x^{-1}$ definierte Abbildung.
- (2) $\text{add}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist die durch $(x, y) \mapsto x + y$ definierte Abbildung.
- (3) $\text{mult}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist die durch $(x, y) \mapsto x \cdot y$ definierte Abbildung.

2.1.10 SATZ

- (1) $\text{inv}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.
- (2) $\text{add}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.
- (3) $\text{mult}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.
- (4) Ist X eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit $0 \notin \text{cl } X$, so ist die Einschränkung $\text{inv}|_X: X \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.
- (5) Ist X eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, so ist die Einschränkung $\text{mult}|_X: X \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.

Beweis:

- (1) Ist $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\varepsilon > 0$, so wähle man $\delta = \min\{\frac{|x|}{2}, \frac{|x|^2 \cdot \varepsilon}{2}\}$.

Dann folgt aus $|x - y| < \delta$ zunächst $|y| \geq \frac{|x|}{2}$ und deshalb

$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \frac{|x-y|}{|x| \cdot |y|} < \frac{2\delta}{|x|^2} \leq \varepsilon$. Die Folgen $(\frac{1}{n})$ und $(\frac{1}{2n})$ sind benachbart, die Folgen (n) und $(2n)$ jedoch nicht.

- (2) Wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Dann folgt aus

$d_E((x, y), (x', y')) = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} < \delta$ zunächst $|x-x'| < \delta$ und $|y-y'| < \delta$ und deshalb $|(x+y) - (x'+y')| \leq |x-x'| + |y-y'| < \varepsilon$.

- (3) Ist $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $\varepsilon > 0$, so wähle man $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{|x|+|y|+1}\}$. Dann folgt aus $d_E((x, y), (x', y')) < \delta$ zunächst $|x-x'| < \delta$ und $|y-y'| < \delta$, also auch $|x'| \leq |x| + 1$ und deshalb

$$\begin{aligned} |x \cdot y - x' \cdot y'| &\leq |x \cdot y - x' \cdot y| + |x' \cdot y - x' \cdot y'| \\ &= |y| \cdot |x - x'| + |x'| \cdot |y - y'| \\ &< (|y| + |x| + 1) \cdot \delta \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Die Folgen $((n, 0))$ und $((n, \frac{1}{n}))$ sind benachbart, die Folgen $(n \cdot 0) = (0)$ und $(n \cdot \frac{1}{n}) = (1)$ jedoch nicht.

- (4) und (5) folgen analog.

2.1.11 DEFINITION

- (1) Für $i = 1, \dots, n$ ist $p_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ die durch $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ definierte Abbildung. Sie heißt *i-te Projektion* von $\mathbb{R}^n$.

- (2) Sind $f_1: X \rightarrow \mathbb{R}, \dots, f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ Abbildungen, so bezeichne $(f_1, \dots, f_n): X \rightarrow \mathbb{R}^n$ die durch $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$ definierte Abbildung.

2.1.12 SATZ

- (1) Alle Projektionen $p_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sind gleichmäßig stetig.
- (2) Die Abbildung $(f_1, \dots, f_n): \underline{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist genau dann (gleichmäßig) stetig, wenn alle $f_i: \underline{X} \rightarrow \mathbb{R}$ (gleichmäßig) stetig sind.

Beweis:

- (1) Folgt unmittelbar aus

$$|p_i(x_1, \dots, x_n) - p_i(y_1, \dots, y_n)| = |x_i - y_i| \leq d_E((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)).$$

- (2) Wegen $f_i = p_i \circ (f_1, \dots, f_n)$,

2.1.12(1) und 2.1.7(3) folgt die (gleichmäßige) Stetigkeit jedes f_i aus der von $(f_1, \dots, f_n)$. Sei umgekehrt jedes f_i gleichmäßig stetig.

Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ für jedes i ein $\delta_i > 0$, so daß aus $d(x, y) < \delta_i$ stets $|f_i(x) - f_i(y)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ folgt. Wählt man $\delta = \min_{1 \leq i \leq n} \delta_i$, so folgt aus

$d(x, y) < \delta$ stets

$$\begin{aligned} d_E((f_1, \dots, f_n)(x), (f_1, \dots, f_n)(y)) \\ = \sqrt{(f_1(x) - f_1(y))^2 + \dots + (f_n(x) - f_n(y))^2} \\ < \sqrt{n \frac{\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Analog zeigt man die Stetigkeit.

2.1.13 SATZ

- (1) Ist $f: \underline{X} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $0 \notin f[X]$, so ist die durch $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ definierte Abbildung $\frac{1}{f}: \underline{X} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.
- (2) Sind $f: \underline{X} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \underline{X} \rightarrow \mathbb{R}$ (gleichmäßig) stetig, so ist die durch $x \mapsto f(x) + g(x)$ definierte Abbildung $(f+g): \underline{X} \rightarrow \mathbb{R}$ (gleichmäßig) stetig.
- (3) Sind $f: \underline{X} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \underline{X} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist die durch $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$ definierte Abbildung $(f \cdot g): \underline{X} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.
- (4) Ist $f: \underline{X} \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig und $0 \notin \text{cl}(f[X])$, so ist $\frac{1}{f}: \underline{X} \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.
- (5) Sind $f: \underline{X} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \underline{X} \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt (d.h. $\exists M > 0 \forall x \in X \quad |f(x)| \leq M$ und $|g(x)| \leq M$) und gleichmäßig stetig, so ist $(f \cdot g): \underline{X} \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.

Beweis:

- (1) und (4) folgen aus $\frac{1}{f} = \text{inv} \circ f$.

- (2) folgt aus $(f + g) = \text{add} \circ (f, g)$.

- (3) und (5) folgen aus $(f \cdot g) = \text{mult} \circ (f, g)$.

2.1.14 BEISPIELE

(1) Die durch $x \mapsto x$ definierte Abbildung $\text{id}_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig, aber $(\text{id}_{\mathbb{R}} \cdot \text{id}_{\mathbb{R}}): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist nicht gleichmäßig stetig, wie in 2.1.8(2) gezeigt wurde, d.h. die Beschränktheit beider Funktionen in 2.1.13(5) ist wesentlich.

(2) Die durch $x \mapsto \sin x$ definierte Abbildung $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig und beschränkt, aber die durch $x \mapsto x \cdot \sin x$ definierte Abbildung $(\text{id}_{\mathbb{R}} \cdot \sin): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist nicht gleichmäßig stetig, denn die Folgen $(2n\pi)$ und $(2n\pi + \frac{1}{n})$ sind benachbart, aber die Folgen $(2n\pi \cdot \sin(2n\pi)) = (0)$ und $((2n\pi + \frac{1}{n}) \cdot \sin(2n\pi + \frac{1}{n})) = ((2n\pi + \frac{1}{n}) \cdot \sin \frac{1}{n})$ sind nicht benachbart, da $\lim_{n \rightarrow \infty} ((2n\pi + \frac{1}{n}) \cdot \sin \frac{1}{n}) = 2\pi \neq 0$. Also genügt es nicht, die Beschränktheit nur einer Funktion in 2.1.13(5) zu fordern.

(3) Die durch $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$ definierte Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig und $0 \notin f[\mathbb{R}]$, aber $\frac{1}{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist nicht gleichmäßig stetig.

(Begründung analog zu 2.1.8(2)). Demnach wird die Aussage in 2.1.13(4) falsch, wenn "cl" unterdrückt wird.

2.1.15 AUFGABEN

Zeigen Sie:

- (1) Eine Abbildung $f: \underline{X} \rightarrow \underline{X'}$ ist genau dann stetig, wenn $f[\text{cl}A] \subset \text{cl}(f[A])$ für alle $A \subset X$ gilt.
- (2) Ist $\underline{X}$ endlich oder diskret, so ist jede Abbildung $f: \underline{X} \rightarrow \underline{X'}$ gleichmäßig stetig.
- (3) Sind $f: \underline{X} \rightarrow \underline{X'}$ und $g: \underline{X} \rightarrow \underline{X'}$ stetig, so ist die Menge $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ abgeschlossen in $\underline{X}$.
- (4) Ist $f: \underline{X} \rightarrow \underline{X}$ stetig, so ist die Menge $\{x \in X \mid f(x) = x\}$ der Fixpunkte von f abgeschlossen in $\underline{X}$.
- (5) Ist A eine Menge offener Mengen in $\underline{X}$ und ist B eine endliche Menge abgeschlossener Mengen in $\underline{X}$ mit $UA = UB = X$, so sind äquivalent:
 - (a) $f: \underline{X} \rightarrow \underline{X'}$ ist stetig
 - (b) für jedes $A \in A$ ist die Einschränkung $f|_A: A \rightarrow \underline{X'}$ stetig
 - (c) für jedes $B \in B$ ist die Einschränkung $f|_B: B \rightarrow \underline{X'}$ stetig.
- (6) Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und gilt $f(x+y) = f(x) + f(y)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$, so gilt $f(x) = f(1) \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

2.1.16 AUFGABEN

f heißt nicht-expansiv, falls $d'(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ für alle $x \in X$ und $y \in X$ gilt. Zeigen Sie:

- (1) Jede nicht-expansive Abbildung ist Lipschitz-stetig.
- (2) Für jede nicht-leere Teilmenge A von X ist die durch $f(x) = \text{dist}(x, A)$ definierte Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ nicht-expansiv.
- (3) Ist $\underline{X} = (X, d)$ ein metrischer Raum, so wird durch $d'((x, y), (x', y')) = \max\{d(x, x'), d(y, y')\}$ eine Metrik auf $X^2 = X \times X$ definiert. Die durch $(x, y) \mapsto d(x, y)$ definierte Abbildung $f: (X^2, d') \rightarrow \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig, aber nicht notwendig nicht-expansiv.
- (4) Seien $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ und $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Dann existiert keine nicht-expansive Abbildung $f: K \rightarrow S^1$ mit $f(x, y) = (x, y)$ für alle $(x, y) \in S^1$.

2.2 ÄQUIVALENTE METRIKEN, ISOMORPHISMEN

2.2.1 DEFINITION

- (1) Eine bijektive Abbildung $f: \underline{X} \rightarrow \underline{X}'$ heißt
 - (i) eine *Isometrie* oder ein *metrischer Isomorphismus*, wenn für $x \in X$ und $y \in X$ stets $d(x, y) = d'(f(x), f(y))$ gilt,
 - (ii) ein *uniformer Isomorphismus*, wenn sowohl $f: \underline{X} \rightarrow \underline{X}'$ als auch $f^{-1}: \underline{X}' \rightarrow \underline{X}$ gleichmäßig stetig sind,
 - (iii) ein *Homöomorphismus* oder *topologischer Isomorphismus*, wenn sowohl $f: \underline{X} \rightarrow \underline{X}'$ als auch $f^{-1}: \underline{X}' \rightarrow \underline{X}$ stetig sind.

Ein *Isomorphismus* wird auch als *Isomorphie* bezeichnet.

- (2) Zwei metrische Räume $\underline{X}$ und $\underline{X}'$ heißen *metrisch (uniform, topologisch) isomorph*, wenn es einen metrischen (uniformen, topologischen) Isomorphismus $f: \underline{X} \rightarrow \underline{X}'$ gibt.
- (3) Zwei Metriken d und d' auf einer Menge X heißen *uniform (bzw. topologisch) äquivalent*, wenn die Identität $\text{id}_X: (X, d) \rightarrow (X, d')$, $x \mapsto x$, ein uniformer (bzw. topologischer) Isomorphismus ist.

2.2.2 SATZ

- (1) Jede Isometrie ist ein uniformer Isomorphismus und jeder uniforme Isomorphismus ein Homöomorphismus.
- (2) Für jeden metrischen Raum $\underline{X}$ ist $\text{id}_X: \underline{X} \rightarrow \underline{X}$ eine metrische Isomorphie.
- (3) Ist $f: \underline{X} \rightarrow \underline{X}'$ eine metrische (uniforme, topologische) Isomorphie, so auch $f^{-1}: \underline{X}' \rightarrow \underline{X}$.
- (4) Sind $f: \underline{X} \rightarrow \underline{X}'$ und $g: \underline{X}' \rightarrow \underline{X}''$ metrische (uniforme, topologische) Isomorphismen, so auch $g \circ f: \underline{X} \rightarrow \underline{X}''$.

Beweis:

- (1) Sei $f: \underline{X} \rightarrow \underline{X}'$ ein metrischer Isomorphismus.

Mit $r := 1$ gilt für $x, y \in X$ stets: $d'(f(x), f(y)) \leq r \cdot d(x, y)$. f ist also nach 2.1.7(1) gleichmäßig stetig. Ebenso gilt für $x', y' \in X'$ stets:

$$\begin{aligned} d(f^{-1}(x'), f^{-1}(y')) &= d'(f(f^{-1}(x')), f(f^{-1}(y'))) \\ &= d'(x', y'), \end{aligned}$$

und f^{-1} ist daher nach 2.1.7(1) ebenfalls gleichmäßig stetig.

Ist f ein uniformer Isomorphismus, so ist f ein Homöomorphismus nach 2.1.7(2).

(2) trivial.

(3) ist klar wegen $(f^{-1})^{-1} = f$.

(4) Seien f, g metrische Isomorphismen. Dann gilt für $x, y \in X$ stets: $d(x, y) = d'(f(x), f(y))$

$$= d''(g(f(x)), g(f(y))),$$

und $g \circ f$ ist bijektiv.

Sind f, g uniforme (topologische) Isomorphismen, so ist auch $g \circ f$ eine uniforme (topologische) Isomorphie wegen 2.1.7(3) und $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

2.2.3 FOLGERUNG

(1) Die metrische (uniforme, topologische) Isomorphie ist eine Äquivalenzrelation auf der Gesamtheit aller metrischen Räume.

(2) Für jede Menge X ist die durch 2.2.1(3) gegebene uniforme (topologische) Äquivalenz eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Metriken auf X .

2.2.4 BEMERKUNG

Die Unterschiede zwischen metrisch isomorphen Räumen sind für den Mathematiker irrelevant. Uniform isomorphe Räume haben immer noch so viele Eigenschaften gemeinsam, daß wir sie als "im wesentlichen gleich" behandeln werden. Für sehr viele Betrachtungen sind selbst die Unterschiede zwischen topologisch isomorphen Räumen unerheblich. Bevor wir uns Beispielen zuwenden, soll in den nächsten beiden Sätzen deutlich gemacht werden, um welche Eigenschaften es sich dabei handelt.

2.2.5 SATZ

Sind d und d' Metriken auf einer Menge X , so sind äquivalent:

(a) d und d' sind uniform äquivalent.

(b) Je zwei Teilmengen von X sind genau dann benachbart bzgl. d , wenn sie benachbart bzgl. d' sind.

(c) Je zwei Folgen in X sind genau dann benachbart bzgl. d , wenn sie benachbart bzgl. d' sind.

(d) Eine Teilmenge von X ist genau dann gleichmäßige Umgebung von einer Menge bzgl. d , wenn sie gleichmäßige Umgebung dieser Menge bzgl. d' ist.

Beweis:

Der Satz folgt unmittelbar aus 2.1.6 und 2.2.1(3).

2.2.6 SATZ

Sind d und d' Metriken auf einer Menge X , so sind äquivalent:

- (a) d und d' sind topologisch äquivalent.
- (b) Eine Teilmenge von X ist genau dann abgeschlossen bzgl. d , wenn sie abgeschlossen bzgl. d' ist.
- (c) Eine Teilmenge von X ist genau dann offen bzgl. d , wenn sie offen bzgl. d' ist.
- (d) Ein Punkt von X ist genau dann Berührungspunkt einer Teilmenge von X bzgl. d , wenn er Berührungspunkt dieser Menge bzgl. d' ist.
- (e) Eine Teilmenge von X ist genau dann Umgebung eines Punktes von X bzgl. d , wenn sie Umgebung dieses Punktes bzgl. d' ist.
- (f) Eine Folge in X konvergiert genau dann gegen einen Punkt bzgl. d , wenn sie bzgl. d' gegen diesen Punkt konvergiert.

Beweis:

Der Satz folgt mit 2.2.1(3) unmittelbar aus 2.1.2 und 2.1.4.

2.2.7 BEMERKUNG

Eigenschaften von metrischen Räumen, Teilmengen von metrischen Räumen, Folgen in metrischen Räumen usf., die unter metrischen (uniformen, topologischen) Isomorphismen erhalten bleiben, heißen *metrische (uniforme, topologische) Eigenschaften*. Jede topologische Eigenschaft ist uniform, jede uniforme Eigenschaft ist metrisch. Die Eigenschaften "offen, abgeschlossen, Berührungspunkt, Umgebung, offener Kern, abgeschlossene Hülle, Grenzwert, Verdichtungspunkt" sind sämtlich topologische Eigenschaften. Ferner: Die Eigenschaften "benachbarte Mengen, benachbarte Folgen, gleichmäßige Umgebung" sind uniforme Eigenschaften, die - wie wir sehen werden - nicht topologisch sind. Die Eigenschaften "Abstand zweier Punkte, Abstand zweier Mengen, offene Kugel" sind metrisch, aber nicht uniform.

2.2.8 SATZ

Sind d und d' Metriken auf X und gilt:

$\exists r > 0 \exists s > 0 \forall x \in X \forall y \in X \quad r \cdot d(x,y) \leq d'(x,y) \leq s \cdot d(x,y)$, so

sind d und d' uniform äquivalent.

Beweis:

Satz 2.1.7(1).

2.2.9 BEISPIELE (Äquivalenz von Metriken)

(1) Auf $I = [0,1]$ sind die durch $d(x,y) = |x-y|$ und $d'(x,y) = |x^2-y^2|$ definierten Metriken uniform äquivalent (warum?), aber die Bedingung von Satz 2.2.8 ist nicht erfüllt, denn es gilt $d(0, \frac{1}{n}) = n \cdot d'(0, \frac{1}{n})$.

(2) Die Metriken d_E, d_M und d_S auf $\mathbb{R}^n$ sind

(i) für $n = 1$ identisch,

(ii) für $n > 1$ paarweise verschieden, aber uniform äquivalent,

denn es gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{1}{n} \cdot d_S(x,y) \leq d_M(x,y) \leq d_E(x,y) \leq d_S(x,y).$$

(3) Auf $\mathbb{R}^n$ sind die diskrete Metrik d_D und die Euklidische Metrik d_E nicht topologisch äquivalent.

(4) Auf der Menge $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$ sind die durch $d(x,y) = |x - y|$ und $d'(x,y) = |x^2 - y^2|$ definierten Metriken topologisch äquivalent, aber nicht uniform äquivalent. Die Folgen (n) und $(n + \frac{1}{n})$ sind benachbart bzgl. d , aber nicht bzgl. d' . Die Eigenschaft zweier Folgen, benachbart zu sein, ist also keine topologische Eigenschaft.

(5) Ist d eine Metrik auf X und r eine positive reelle Zahl, so sind die durch $d'(x,y) = r \cdot d(x,y)$ und $d''(x,y) = \min \{d(x,y), r\}$ definierten Metriken uniform äquivalent zu d . Ersteres besagt, daß die uniformen und damit auch die topologischen Eigenschaften eines metrischen Raumes unabhängig sind von der Wahl der Maßeinheiten, mit der man Abstände mißt. Letzteres besagt, daß jede Metrik zu einer beschränkten Metrik uniform äquivalent ist.

(6) Sind $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ metrische Räume, so sind die durch

$$d_E((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n))$$

$$= \sqrt{(d_1(x_1, y_1))^2 + \dots + (d_n(x_n, y_n))^2},$$

$$d_S((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n))$$

$$= d_1(x_1, y_1) + \dots + d_n(x_n, y_n) \quad \text{und}$$

$$d_M((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n))$$

$$= \max \{d_1(x_1, y_1), \dots, d_n(x_n, y_n)\}$$

definierten Metriken auf der Menge $X_1 \times \dots \times X_n$ paarweise uniform äquivalent, denn es gilt für alle $x \in X_1 \times \dots \times X_n, y \in X_1 \times \dots \times X_n$:

$$\frac{1}{n} d_S(x,y) \leq d_M(x,y) \leq d_E(x,y) \leq d_S(x,y).$$

Da die von uns untersuchten Metriken auf $\mathbb{R}^n$ offenbar Spezialfälle der hier eingeführten Metriken sind, bezeichnen wir letztere auch als die *Euklidische Metrik* d_E , die *Summen-Metrik* d_S und die *Maximum-Metrik* d_M auf dem Produkt $X_1 \times \dots \times X_n$. Als ein *uniformes Produkt* der Räume $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ bezeichnet man jeden metrischen Raum $(X_1 \times \dots \times X_n, d)$, für den d zu einer (und somit zu allen) der Metriken d_E , d_S und d_M uniform äquivalent ist.

2.2.10 BEISPIELE (Isomorphie von metrischen Räumen)

(1) Sind r und s reelle Zahlen mit $r < s$, so induziert $x \mapsto r + (s-r)x$ uniforme Isomorphismen zwischen den folgenden Teilräumen von $\mathbb{R}$:

- (i) $[0, 1] \rightarrow [r, s]$
- (ii) $]0, 1[\rightarrow [r, s[$
- (iii) $]0, 1] \rightarrow]r, s]$
- (iv) $]0, 1[\rightarrow]r, s[$

Diese Isomorphismen sind metrische Isomorphismen genau dann, wenn $s - r = 1$ gilt. Andernfalls gibt es keine metrischen Isomorphismen zwischen den entsprechenden Räumen.

(2) Durch $x \mapsto (-x)$ wird ein metrischer Isomorphismus $[0, 1] \rightarrow]-1, 0]$ induziert.

(3) Durch $x \mapsto \tan x$ wird ein Homöomorphismus $] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ induziert.

(4) Durch $x \mapsto e^x$ wird ein Homöomorphismus $\mathbb{R} \rightarrow \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ induziert.

(5) Die Räume $[0, 1]$ und $]0, 1[$ sind nicht topologisch isomorph. Wäre nämlich $f: [0, 1] \rightarrow]0, 1[$ ein Homöomorphismus, so hätte die Folge $(f^{-1}(\frac{1}{n}))$ bekanntlich einen Verdichtungspunkt x in $[0, 1]$ und somit wäre $f(x)$ ein Verdichtungspunkt der Folge $(\frac{1}{n})$ in $]0, 1[$, was nicht möglich ist, da die Folge $(\frac{1}{n})$ keinen Verdichtungspunkt in $]0, 1[$ hat. Genauso zeigt man, daß auch die Räume $[0, 1]$ und $]0, 1]$ nicht topologisch isomorph (= homöomorph) sind.

(6) Die Räume $]0, 1[$ und $]0, 1]$ sind nicht topologisch isomorph. Wäre nämlich $f:]0, 1[\rightarrow]0, 1]$ ein Homöomorphismus, so gäbe es Punkte $a \in]0, 1[$ und $b \in]0, 1[$ mit $a < f(0) < b$. Sei $r = f^{-1}(a)$ und $s = f^{-1}(b)$.

Fall 1: $r < s$. Die Einschränkung $\tilde{f}: [r, s] \rightarrow]0, 1[$ von f ist eine stetige Abbildung mit $\tilde{f}(r) = a < f(0) < b = \tilde{f}(s)$. Es gibt aber wegen der Bijektivität von f kein $x \in [r, s]$ mit $\tilde{f}(x) = f(0)$ im Widerspruch zum Zwischenwertsatz der Analysis.

Fall 2: $s < r$ führt analog zu einem Widerspruch. Später, wenn wir die geeigneten Begriffe bereitgestellt haben, werden wir einen viel kürzeren und einfacheren Beweis geben.

(7) Für $n \neq m$ sind die metrischen Räume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ nicht metrisch isomorph. Das folgt unmittelbar aus der Beobachtung (Beweis ?), daß $\mathbb{R}^n$ einen diskreten Teilraum mit $n + 1$ Elementen, aber keinen diskreten Teilraum mit mehr als $n + 1$ Elementen besitzt. Die Tatsache, daß die metrischen Räume $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ für $n \neq m$ auch nicht topologisch isomorph sind (Brouwers Satz von der Invarianz der Dimension), ist (für $\min\{n, m\} > 1$) erheblich schwerer zu beweisen. (Vergl. 5.1.25(3).)

2.2.11 BEMERKUNG

(1) Sind r und s reelle Zahlen mit $r < s$, so sind die Räume $I = [0, 1]$ und $[r, s]$ nach 2.2.10(1) uniform isomorph. Da wir in der Regel nur an uniformen Eigenschaften interessiert sind, werden wir uns die Freiheit nehmen, immer dann, wenn es die Betrachtung erleichtert, den Raum I durch einen geeigneten Raum $[r, s]$ zu ersetzen. Entsprechend werden wir mit $]0, 1[$ und $]r, s[$ verfahren.

(2) Die Räume $]0, 1[$, $\{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ und $\mathbb{R}$ sind, wie wir in 2.2.10 gesehen haben, paarweise topologisch isomorph. Sind wir nur an topologischen Eigenschaften interessiert, so werden wir - analog wie oben - immer dann, wenn es die Betrachtungen erleichtert, den Raum $\mathbb{R}$ durch $]0, 1[$ oder $\{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ oder einen Raum der Form $]r, s[$ ersetzen. Sind wir hingegen an uniformen Eigenschaften interessiert, die nicht topologisch sind, so dürfen wir keine dieser Ersetzungen vornehmen. Keine zwei der Räume $\mathbb{R}$, $]0, 1[$ und $\{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ sind nämlich uniform isomorph. Das werden wir für $]0, 1[$ und $\mathbb{R}$ in 2.3.8 beweisen. Einen einfacheren Beweis dafür, daß keine zwei der Räume $]0, 1[$, $\mathbb{R}$ und $\{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ uniform isomorph sind, werden wir im nächsten Paragraphen geben, nachdem der Begriff der Cauchy-Folge als geeignetes Hilfsmittel bereitgestellt worden ist.

2.2.12 AUFGABEN

Zeigen Sie:

(1) Je zwei Metriken auf einer endlichen Menge X sind uniform äquivalent.

(2) Sei d_E die durch $d_E(x, y) = |x - y|$ definierte Euklidische Metrik auf $X = [0, 1]$, und sei d eine zu d_E topologisch äquivalente Metrik auf $[0, 1]$. Dann sind d_E und d uniform äquivalent.

(3) Sei d_E die durch $d_E(x,y) = |x - y|$ definierte Euklidische Metrik auf $\underline{X} =]0,1[$. Finden Sie eine zu d_E topologisch äquivalente Metrik d auf $]0,1[$, die zu d_E nicht uniform äquivalent ist.

(4) Auf $\mathbb{N}$ wird durch $d(x,y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$ eine zur diskreten Metrik topologisch aber nicht uniform äquivalente Metrik definiert.

(5) Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (a) d ist uniform äquivalent zur diskreten Metrik auf X
- (b) (X,d) ist zu einem diskreten metrischen Raum uniform isomorph
- (c) für jeden metrischen Raum $\underline{X'}$ ist jede Abbildung $f: (X,d) \rightarrow \underline{X'}$ gleichmäßig stetig
- (d) disjunkte Teilmengen von X sind nicht benachbart in (X,d)
- (e) $\inf \{d(x,y) \mid x \in X \text{ und } y \in X \text{ und } x \neq y\} > 0$.

(6) Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (a) d ist topologisch äquivalent zur diskreten Metrik auf X
- (b) (X,d) ist zu einem diskreten metrischen Raum topologisch isomorph
- (c) für jeden metrischen Raum $\underline{X'}$ ist jede Abbildung $f: (X,d) \rightarrow \underline{X'}$ stetig
- (d) (X,d) erfüllt eine (und somit jede) der Bedingungen von 1.3.22(4).

2.2.13 AUFGABEN

Konstruieren Sie je eine Abbildung $f: \underline{\mathbb{R}} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$, so daß

- (1) f ein metrischer Isomorphismus, aber nicht die Identität ist,
- (2) f ein uniformer, aber kein metrischer Isomorphismus ist,
- (3) f ein topologischer, aber kein uniformer Isomorphismus ist.

2.3 FORTSETZUNG (GLEICHMÄSSIG) STETIGER ABBILDUNGEN NACH

$]0,1[$, $]0,1[$ UND $\underline{\mathbb{R}}$

Sind $\underline{X}$ und $\underline{X'}$ metrische Räume, ist $\underline{A}$ ein Teilraum von $\underline{X}$ und ist $f: \underline{A} \rightarrow \underline{X'}$ eine (gleichmäßig) stetige Abbildung, so wollen wir die Frage, ob sich f zu einer (gleichmäßig) stetigen Abbildung $g: \underline{X} \rightarrow \underline{X'}$ fortsetzen läßt (d.h. $g|_{\underline{A}} = f$), kurz als das Fortsetzbarkeitsproblem bezeichnen. Dieses Problem ist aus zweierlei Gründen interessant:

(1) Viele Begriffe und Sätze der Analysis bzw. der Topologie lassen sich auf folgende Form bringen: Unter gewissen Voraussetzungen an $\underline{X}$, $\underline{X'}$, $\underline{A}$ und f ist das Fortsetzbarkeitsproblem lösbar (bzw. nicht lösbar). Das werden wir in 2.3.1 am Beispiel des Zwischenwertsatzes der Analysis näher erklären.

(2) Weiß man, daß zwischen zwei metrischen Räumen "hinreichend viele" (gleichmäßig) stetige Abbildungen existieren, so ist man häufig in

der Lage, aus der Kenntnis der Struktur des einen Raumes wichtige Kenntnisse über die Struktur des anderen Raumes zu gewinnen. Insbesondere werden wir in Paragraph 7 zeigen, daß jeder metrische Raum X , für den "hinreichend viele" (gleichmäßig) stetige Abbildungen in einen der Räume $\mathbb{R}$, $[0,1]$, $[0,1]$ bzw. $\mathbb{N}$ existieren, uniform bzw. topologisch isomorph ist zu einem Raum, der vermöge besonders einfacher und übersichtlicher Konstruktionen aus $\mathbb{R}$, $[0,1]$, $[0,1]$ bzw. $\mathbb{N}$ gewonnen werden kann. Weiß man nun, daß sich für hinreichend viele Teilräume A von X das Fortsetzbarkeitsproblem lösen läßt, so erhält man "hinreichend viele" (gleichmäßig) stetige Abbildungen $X \rightarrow X'$; denn für "kleine" Teilräume von X gibt es i. allg. sehr viele (gleichmäßig) stetige Abbildungen nach X' , z.B. ist jede Abbildung von einem endlichen Teilraum von X nach X' gleichmäßig stetig (vergl. Aufgabe 2.1.15(2)).

In diesem Paragraphen werden wir das Fortsetzbarkeitsproblem unter folgenden Einschränkungen vollständig lösen:

- (1) A ist ein abgeschlossener Teilraum von X (d.h. A ist eine abgeschlossene Teilmenge von X , und A ist der zugehörige Teilraum).
- (2) X' ist einer der Räume $[0,1]$, $]0,1[$ bzw. $\mathbb{R}$.

Diese Ergebnisse gehen auf H. Tietze und P. Urysohn zurück (Tietze-Urysohnsche Fortsetzbarkeitssätze)

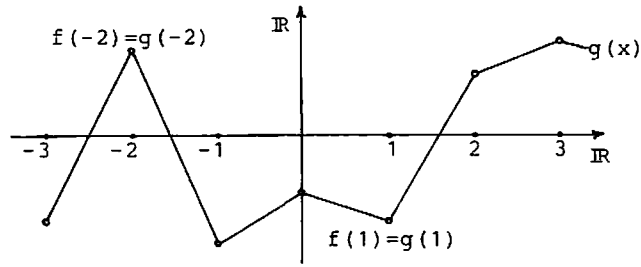
2.3.1 BEISPIELE

(1) Der Zwischenwertsatz der Analysis läßt sich folgendermaßen formulieren: Sind a, b, c, d, e reelle Zahlen mit $a < b$ und $c < d < e$ (oder $e < d < c$), so läßt sich die durch $f(a) = c$ und $f(b) = e$ definierte stetige Abbildung $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{d\}$ nicht zu einer stetigen Abbildung $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{d\}$ fortsetzen.

(2) Bezeichnet man die Menge aller Punkte des $\mathbb{R}^{n+1}$, deren Abstand vom Nullpunkt gleich 1 ist, mit S^n , so läßt sich die durch $x \mapsto x$ definierte gleichmäßig stetige Abbildung $\underline{S}^n \rightarrow \underline{S}^n$ nicht zu einer stetigen Abbildung $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \underline{S}^n$ fortsetzen. Dieser Satz, der für $n = 0$ sofort aus dem Zwischenwertsatz folgt und dessen Beweis für $n \geq 1$ den Rahmen dieses Kurses sprengen würde, gehört zu den bemerkenswertesten Sätzen der Topologie mit Anwendung in den verschiedensten Zweigen der Mathematik.

(3) Jede Abbildung $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und läßt sich zu einer stetigen Abbildung $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fortsetzen. Bezeichnet man für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit n_x diejenige ganze Zahl, für die $n_x \leq x < n_x + 1$ gilt, so wird durch $g(x) = (n_x + 1 - x) \cdot f(n_x) + (x - n_x) \cdot f(n_x + 1)$ eine stetige Fortsetzung

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von f definiert:



Mit demselben Verfahren läßt sich zeigen, daß für jede abgeschlossene Teilmenge A von $\mathbb{R}$ jede stetige Abbildung $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ zu einer stetigen Abbildung $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fortgesetzt werden kann. Dem Leser sei empfohlen, die Konstruktion von g und den Nachweis der Stetigkeit von g selbst durchzuführen. Wir werden in diesem Paragraphen einen sehr viel allgemeineren Satz (allerdings mit einem komplizierteren Verfahren) beweisen.

(4) Jede Abbildung $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig. Aber die durch $f(x) = x^2$ definierte Abbildung $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ läßt sich nicht zu einer gleichmäßig stetigen Abbildung $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fortsetzen. Ist nämlich g eine Fortsetzung von f , so gilt $g(n+1) - g(n) = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt durch Teilung von $[n, n+1]$ in $2n + 1$ gleich lange Intervalle, daß Punkte x_n und y_n in $[n, n+1]$ mit $|x_n - y_n| = \frac{1}{2n+1}$ und $|g(x_n) - g(y_n)| \geq 1$ existieren. So gebildete Folgen (x_n) und (y_n) sind benachbart in $\mathbb{R}$ (vgl. 1.3.12), aber $(g(x_n))$ und $(g(y_n))$ sind nicht benachbart in $\mathbb{R}$. Also ist $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nicht gleichmäßig stetig.

Nach diesen negativen Antworten auf das Fortsetzbarkeitsproblem wenden wir uns den positiven Resultaten zu. Zunächst folgende Frage: Sei A eine Teilmenge von X , und sei x ein Punkt von X mit $x \notin \text{cl}A$; ist dann die durch $f(x) = 1$ und $f(a) = 0$ für alle $a \in A$ definierte gleichmäßig stetige Abbildung von dem durch $A \cup \{x\}$ bestimmten Teilraum von X nach $\mathbb{R}$ fortsetzbar zu einer gleichmäßig stetigen Abbildung $X \rightarrow \mathbb{R}$? Folgender Satz liefert eine konstruktive positive Antwort:

2.3.2 SATZ

Für jede nicht-leere Teilmenge A von X ist die durch $f(x) = \text{dist}(x, A)$ definierte Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig.

Beweis:

Für alle $x \in X$, $y \in X$, $a \in A$ gilt

$\text{dist}(x,A) \leq d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a)$, also
 $\text{dist}(x,A) - d(x,y) \leq d(y,a)$, also $\text{dist}(x,A) - d(x,y) \leq \text{dist}(y,A)$,
 also $f(x) - f(y) \leq d(x,y)$. Analog folgt $f(y) - f(x) \leq d(y,x)$,
 also $d_E(f(x),f(y)) = |f(x) - f(y)| \leq d(x,y)$. Somit ist f gleichmäßig
 stetig (vgl. 2.1.7(1)).

Sind A und B nicht-leere, disjunkte Teilmengen von $\underline{X}$,

so wird durch $x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in A \\ 1, & \text{falls } x \in B \end{cases}$ eine Abbildung von dem durch

$A \cup B$ bestimmten Teilraum von $\underline{X}$ nach $[0,1]$ definiert. Hat diese Abbil-
 dung eine stetige (bzw. gleichmäßig stetige) Fortsetzung $f: \underline{X} \rightarrow [0,1]$,
 so gilt $\text{cl}A \cap \text{cl}B = \emptyset$ (bzw. A und B sind nicht benachbart), was Sie
 selbst zeigen sollten. Der nächste Satz zeigt, daß diese notwendigen
 Bedingungen auch hinreichend für die (gleichmäßig) stetige Fortsetz-
 barkeit sind. Der Beweis ist wieder konstruktiv.

2.3.3 SATZ (Urysohnsches Lemma für metrische Räume)

Sind A und B nicht-leere Teilmengen von X mit $\text{cl}A \cap \text{cl}B = \emptyset$, so wird
 durch $f(x) = \frac{\text{dist}(x,A)}{\text{dist}(x,A)+\text{dist}(x,B)}$ eine stetige Abbildung $f: \underline{X} \rightarrow [0,1]$
 definiert. Diese Abbildung ist genau dann gleichmäßig stetig, wenn A
 und B nicht benachbart sind.

Beweis:

(1) Die durch $g(x) = \text{dist}(x,A)$ und $h(x) = \text{dist}(x,B)$ definierten Ab-
 bildungen $g, h: \underline{X} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$ sind nach 2.3.2 stetig. Also ist auch
 $k := g + h: \underline{X} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$ stetig. Wegen $\text{cl}A \cap \text{cl}B = \emptyset$ gilt $0 \notin k[X]$. Also ist
 $\frac{g}{k}: \underline{X} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$ stetig. Wegen $\frac{g}{k}[X] \subset [0,1]$ ist die induzierte Abbildung
 $f: \underline{X} \rightarrow [0,1]$ ebenfalls stetig.

(2) Ist f gleichmäßig stetig, so sind A und B nicht benachbart in $\underline{X}$,
 denn andernfalls müßten $f[A] = \{0\}$ und $f[B] = \{1\}$ benachbart in $[0,1]$
 sein, was offenbar nicht der Fall ist.

(3) Sei $\text{dist}(A,B) = r > 0$. Dann gilt (mit obigen Bezeichnungen) für
 alle $x \in X$ sowohl $\frac{g(x)}{k(x)} \leq 1$ als auch $k(x) \geq r$, also $\frac{1}{k(x)} \leq \frac{1}{r}$. Da die
 Abbildungen $g: \underline{X} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$ und $k: \underline{X} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$ gleichmäßig stetig sind, gibt es
 zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß aus $d(x,y) < \delta$ sowohl
 $|g(x) - g(y)| < \frac{r \cdot \varepsilon}{2}$ als auch $|k(x) - k(y)| < \frac{r \cdot \varepsilon}{2}$ folgt. Somit folgt
 aus $d(x,y) < \delta$ stets

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{g(x)}{k(x)} - \frac{g(y)}{k(y)} \right| = \frac{|g(x) \cdot k(y) - k(x) \cdot g(y)|}{k(x) \cdot k(y)} \\ &\leq \frac{|g(x) \cdot k(y) - g(x) \cdot k(x)| + |g(x) \cdot k(x) - k(x) \cdot g(y)|}{k(x) \cdot k(y)} \end{aligned}$$

$$= \frac{g(x)}{k(x)} \left(\frac{|k(y) - k(x)|}{k(y)} + \frac{|g(x) - g(y)|}{k(y)} \right) \\ < 1 \cdot \left(\frac{\frac{\epsilon}{2}}{r} + \frac{\frac{\epsilon}{2}}{r} \right) = \epsilon.$$

Also ist $f: \underline{X} \rightarrow [0,1]$ gleichmäßig stetig.

Mit obigem Satz ist ein wichtiges Hilfsmittel zur Lösung des Fortsetzbarkeitsproblems bereitgestellt. Das andere Hilfsmittel liefert der folgende, in speziellerer Form bereits aus der Analysis bekannte, nützliche Satz:

2.3.4 SATZ

Konvergiert eine Folge (f_n) (gleichmäßig) stetiger Abbildungen $f_n: \underline{X} \rightarrow [0,1]$ gleichmäßig gegen eine Funktion f (d.h. es gilt $\forall \epsilon > 0 \exists m \forall n \geq m \forall x \in X |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$), so ist $f: \underline{X} \rightarrow [0,1]$ (gleichmäßig) stetig.

Beweis:

Wir beweisen den "gleichmäßig stetigen Teil" der Aussage; der andere verläuft völlig analog. Sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß für alle $x \in X$ gilt $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$. Da f_n gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so daß aus $d(x,y) < \delta$ stets $|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\epsilon}{3}$ folgt. Somit folgt aus $d(x,y) < \delta$ stets $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| < \epsilon$.

2.3.5 THEOREM (Fortsetzbarkeitstheorem für $[0,1]$)

Ist $\underline{A}$ ein abgeschlossener Teilraum von $\underline{X}$, so läßt sich jede (gleichmäßig) stetige Abbildung $f: \underline{A} \rightarrow [0,1]$ zu einer (gleichmäßig) stetigen Abbildung $g: \underline{X} \rightarrow [0,1]$ fortsetzen.

Beweis:

Da die Beweise für den stetigen und den gleichmäßig stetigen Fall völlig analog verlaufen, beschränken wir uns auf den gleichmäßig stetigen Fall. Da die metrischen Räume $[-1,1]$ und $[0,1]$ uniform isomorph sind, können wir den Satz mit $[-1,1]$ anstelle von $[0,1]$ beweisen, was etwas bequemer ist. Sei also $f: \underline{A} \rightarrow [-1,1]$ gleichmäßig stetig. Durch Induktion definieren wir jetzt Folgen $(f_n: \underline{A} \rightarrow [-\frac{2}{3}^n, \frac{2}{3}^n])$ und $(g_n: \underline{X} \rightarrow [-\frac{2^{n-1}}{3^n}, \frac{2^{n-1}}{3^n}])$ gleichmäßig stetiger Abbildungen.

Induktionsanfang: $A_1 = f^{-1}[-1, -\frac{1}{3}]$ und $B_1 = f^{-1}[\frac{1}{3}, 1]$ sind nicht benachbart. Also existiert nach 2.3.3 eine gleichmäßig stetige Abbildung $g_1: \underline{X} \rightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ mit $g_1(a) = -\frac{1}{3}$ für alle $a \in A_1$ und $g_1(b) = \frac{1}{3}$ für

alle $b \in B_1$ (z.B. $g_1(x) = \frac{2}{3} \cdot \text{dist}(x, A_1) \cdot (\text{dist}(x, A_1) + \text{dist}(x, B_1))^{-1} - \frac{1}{3}$).
Dann wird durch $f_1(x) = f(x) - g_1(x)$ eine gleichmäßig stetige Abbildung $f_1: \underline{A} \rightarrow [-\frac{2}{3}, +\frac{2}{3}]$ definiert.

Induktionsschluß: Seien f_n und g_n definiert. Dann sind

$A_{n+1} = f_n^{-1}([-\frac{2}{3}]^n, -\frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3})^n])$ und $B_{n+1} = f_n^{-1}([\frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3})^n, (\frac{2}{3})^n])$ nicht benachbart. Also existiert nach 2.3.3 eine gleichmäßig stetige Abbildung $g_{n+1}: \underline{X} \rightarrow [-\frac{2^n}{3^{n+1}}, \frac{2^n}{3^{n+1}}]$ mit $g_{n+1}(a) = -\frac{2^n}{3^{n+1}}$ für $a \in A_{n+1}$ und $g_{n+1}(b) = \frac{2^n}{3^{n+1}}$ für $b \in B_{n+1}$ (z.B.

$$g_{n+1}(x) = (\frac{2}{3})^{n+1} \cdot \text{dist}(x, A_{n+1}) \cdot (\text{dist}(x, A_{n+1}) + \text{dist}(x, B_{n+1}))^{-1} - \frac{2^n}{3^{n+1}}).$$

Folglich wird durch $f_{n+1}(x) = f_n(x) - g_{n+1}(x)$ eine gleichmäßig stetige Abbildung $f_{n+1}: \underline{A} \rightarrow [-\frac{2}{3}]^{n+1}, (\frac{2}{3})^{n+1}]$ definiert. Somit sind die gewünschten Folgen (f_n) und (g_n) konstruiert. Für jedes n sei

$h_n: \underline{X} \rightarrow [0, 1]$ definiert durch $h_n(x) = g_1(x) + \dots + g_n(x)$. Da

$$|g_n(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3})^{n-1} \text{ für jedes } x \in \underline{X} \text{ gilt und die Reihe } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3})^{n-1} \text{ gegen } 1 \text{ konvergiert,}$$

konvergiert die Folge (h_n) gleichmäßig gegen eine Funktion $g: \underline{X} \rightarrow [-1, +1]$. Nach 2.3.4 ist $g: \underline{X} \rightarrow [-1, 1]$ gleichmäßig stetig. Ferner gilt für jedes $x \in \underline{A}$ und jedes $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = g_1(x) + f_1(x) = g_1(x) + g_2(x) + f_2(x) = \dots = h_n(x) + f_n(x)$$

und folglich $|f(x) - h_n(x)| = |f_n(x)| \leq (\frac{2}{3})^n$. Somit konvergiert für jedes $x \in \underline{A}$ die Folge $h_n(x)$ gegen $f(x)$ und gegen $g(x)$, woraus $f(x) = g(x)$ folgt. Somit ist g Fortsetzung von f .

2.3.6 THEOREM (Fortsetzbarkeitstheorem für $]0, 1[$)

Ist $\underline{A}$ ein abgeschlossener Teilraum von $\underline{X}$, so läßt sich jede (gleichmäßig) stetige Abbildung $f: \underline{A} \rightarrow]0, 1[$ zu einer (gleichmäßig) stetigen Abbildung $g: \underline{X} \rightarrow]0, 1[$ fortsetzen.

Beweis:

Da die metrischen Räume $] -1, +1[$ und $]0, 1[$ uniform isomorph sind, können wir diesen Satz mit $] -1, 1[$ anstelle von $]0, 1[$ beweisen, was etwas bequemer ist. Den stetigen (1) und den gleichmäßig stetigen (2) Fall werden wir getrennt behandeln. Da für $A = \emptyset$ die Aussagen trivial sind, beschränken wir uns im Beweis auf den Fall $A \neq \emptyset$.

(1) Sei $f: \underline{A} \rightarrow] -1, 1[$ stetig. Nach dem Fortsetzbarkeitstheorem für $]0, 1[$ 2.3.5 existiert eine stetige Fortsetzung $h: \underline{X} \rightarrow] -1, 1[$ von f , aber $h[\underline{X}]$ liegt i. allg. nicht in $] -1, 1[$.

In diesem Fall ist die abgeschlossene Menge $B = h^{-1}[\{-1,1\}]$ nicht-leer und zu A disjunkt. Nach dem Urysohnschen Lemma existiert eine stetige Abbildung $k: \underline{X} \rightarrow [0,1]$ mit $k(a) = 1$ für alle $a \in A$ und $k(b) = 0$ für alle $b \in B$ (z.B. $k(x) = \text{dist}(x,B) \cdot (\text{dist}(x,A) + \text{dist}(x,B))^{-1}$). Also ist die durch $g(x) = h(x) \cdot k(x)$ definierte Abbildung $g: \underline{X} \rightarrow]-1,1[$ eine stetige Fortsetzung von f .

(2) Sei $f: \underline{A} \rightarrow]-1,1[$ gleichmäßig stetig. Wie oben existiert eine gleichmäßig stetige Fortsetzung $h: \underline{X} \rightarrow [-1,+1]$ von f , aber $h[X]$ liegt i. allg. nicht in $] -1,1[$. Durch Nachrechnen erkennt man jedoch, daß die durch

$$g(x) = \begin{cases} \max \{0, h(x) - \text{dist}(x,A)\}, & \text{falls } h(x) \geq 0 \\ \min \{0, h(x) + \text{dist}(x,A)\}, & \text{falls } h(x) \leq 0 \end{cases}$$

definierte Abbildung $g: \underline{X} \rightarrow]-1,1[$ eine gleichmäßig stetige Fortsetzung von f ist.

2.3.7 THEOREM (Fortsetzbarkeitstheorem für $\mathbb{R}$)

Ist $\underline{A}$ ein abgeschlossener Teilraum von $\underline{X}$, so läßt sich jede stetige Abbildung $f: \underline{A} \rightarrow \mathbb{R}$ zu einer stetigen Abbildung $g: \underline{X} \rightarrow \mathbb{R}$ fortsetzen. Ein entsprechender Satz für gleichmäßig stetige Abbildungen gilt nicht.

Beweis:

Da $]0,1[$ und $\mathbb{R}$ topologisch isomorph sind, folgt die stetige Fortsetzbarkeit stetiger Abbildungen nach $\mathbb{R}$ aus dem vorangegangenen Satz 2.3.6. Daß gleichmäßig stetige Abbildungen nach $\mathbb{R}$ i. allg. keine gleichmäßig stetige Fortsetzung haben, wurde bereits in Beispiel 2.3.1(4) gezeigt.

2.3.8 FOLGERUNG

Die Räume $]0,1[$ und $\mathbb{R}$ sind nicht uniform isomorph.

Beweis:

Wäre $h: \mathbb{R} \rightarrow]0,1[$ ein uniformer Isomorphismus, und ist $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ die durch $f(x) = x^2$ definierte gleichmäßig stetige Abbildung, so gäbe es nach 2.3.6 eine gleichmäßig stetige Fortsetzung $k: \mathbb{R} \rightarrow]0,1[$ von $h \circ f: \mathbb{Z} \rightarrow]0,1[$, woraus folgte, daß $h^{-1} \circ k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Fortsetzung von f wäre, was nach 2.3.1(4) nicht möglich ist.

2.3.9 BEMERKUNG

In bezug auf das Fortsetzbarkeitsproblem für Abbildungen nach $\mathbb{R}$ verhalten sich die stetigen Abbildungen angenehmer als die gleichmäßig

stetigen. Andererseits kann man im Fortsetzbarkeitstheorem für gleichmäßig stetige Abbildungen nach $[0,1]$ die Abgeschlossenheit von A fallen lassen, wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden. Das ist für stetige Abbildungen nicht möglich, wie die durch $f(x) = \frac{1}{x}$ definierte stetige Abbildung $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ zeigt, die sich offenbar nicht stetig auf $\mathbb{R}$ fortsetzen läßt. Hier verhalten sich also die gleichmäßig stetigen Abbildungen angenehmer.

2.3.10 AUFGABEN

Zeigen Sie:

(1) Jede Abbildung $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ von einer nichtleeren endlichen Teilmenge A von $\mathbb{R}$ läßt sich zu einer gleichmäßig stetigen Abbildung $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fortsetzen.

(2) Eine Abbildung $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ läßt sich genau dann zu einer gleichmäßig stetigen Abbildung $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fortsetzen, wenn die Menge $\{f(n+1) - f(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ beschränkt ist.

(3) Ist $f: A \rightarrow [1,2]$ eine stetige Abbildung von einem abgeschlossenen Teilraum A von X mit $1 = \inf f[A]$ und $2 = \sup f[A]$, so wird durch

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ falls } x \in A \\ \frac{1}{\text{dist}(x,A)} \cdot \inf \{f(a) \cdot d(x,a) \mid a \in A\} & , \text{ falls } x \in X \setminus A \end{cases}$$

eine stetige Fortsetzung $g: X \rightarrow [1,2]$ von f definiert.

(4) Ist A eine Teilmenge von X mit $\inf \{d(a,b) \mid a \in A, b \in A \text{ und } a \neq b\} > 0$, so läßt sich jede (beschränkte) Abbildung $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ zu einer (gleichmäßig) stetigen Abbildung $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ fortsetzen.

(5) Ist A eine Teilmenge von X , so daß jede in X konvergierende Folge von A fast-konstant ist, so läßt sich jede Abbildung $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ fortsetzen. Zeigen Sie, daß es nicht ausreicht zu verlangen, daß jede in A konvergierende Folge fast-konstant ist.

(6) Je zwei disjunkte abgeschlossene Mengen in X haben disjunkte Umgebungen in X .