§ 1 METRISCHE RÄUME, GRUNDBEGRIFFE UND BEISPIELE

STUDIERHINWEISE ZU § 1

Der § 1 sollte für Sie im wesentlichen wiederholenden Charakter haben. Wichtig und z.T. neu sind allerdings die Beispiele 1.1.2-6. Studieren Sie diese sehr sorgfältig. Insbesondere sollten Sie sich die in 1.2 und 1.3 definierten Begriffe nicht nur anhand der Ihnen aus der Analysis bekannten metrischen Räume $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, etc. veranschaulichen, sondern anhand jedes der beschriebenen Beispiele.
Eine souveräne Handhabung der Begriffe und Ergebnisse von § 1 ist für das Verständnis der weiteren §§ unbedingt erforderlich. Legen Sie § 1 also nicht allzu rasch als "bekannt" zur Seite. Keiner der Beweise sollte Ihnen Schwierigkeiten bereiten, ausgenommen der von Satz 1.3.18, den Sie ruhig mehrmals durcharbeiten sollten. Der Satz 1.3.18 selbst erscheint vielleicht zunächst etwas merkwürdig. Er wird Ihnen aber später die Arbeit erheblich erleichtern, da er es gestattet, den Begriff der benachbarten Folgen auf den einfachen und besonders anschaulichen Begriff der benachbarten Mengen zurückzuführen.

1.0 EINFÜHRUNG

Beim Studium der Analysis wird Ihnen aufgefallen sein, daß Ihnen Begriffe wie "Häufungspunkt einer Menge", "abgeschlossene Menge", "Grenzwert einer Folge", usw. an zwei Stellen begegnen, nämlich (i) bei der Topologie von $\mathbb{R}$ und (ii) bei der Topologie von $\mathbb{R}^n$. Ihnen wird ferner aufgefallen sein, daß in den Fällen (i) und (ii) ganz analoge Sätze gelten und darüber hinaus die Beweise zu den Sätzen ganz analog verliefen. Das ist kein Zufall. Wie wir in diesem Kapitel sehen werden, lassen sich für jeden metrischen Raum, d.h. für jede Menge, für die in sinnvoller Weise ein Abstand zwischen je zweien ihrer Punkte erklärt ist, die eingangs erwähnten Begriffe so definieren, daß viele aus der Analysis bekannte Ergebnisse in diesem viel allgemeineren Rahmen (d.h. dem der metrischen Räume) richtig bleiben. Das hat unter anderem folgende Vorteile:

(1) Man braucht viele Ergebnisse, die analog in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ gelten, nicht - wie in der Analysis geschehen - in beiden Situationen getrennt zu beweisen, sondern nur einmal in einem allgemeineren Rahmen. Das ist offenbar ökonomischer.

(2) Der Anwendungsbereich ist viel größer, als durch die Beispiele $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^n$ angedeutet wird. In vielen anderen mathematischen Gebieten, u.a. in der Maßtheorie und insbesondere in der Funktionalanalysis spielt die Untersuchung metrischer Räume eines bestimmten Typs eine wesentliche Rolle.

(3) Begriffsbildungen und Beweise werden oft erheblich durchsichtiger dadurch, daß der Begriff des metrischen Raumes von topologisch unwesentlichem Ballast weitgehend befreit ist.

1.1 DEFINITION UND BEISPIELE

1.1.1 DEFINITION

Sei X eine Menge, $\mathbb{R}^+ := \{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ und } x \geq 0\}$. Eine Abbildung $d: X \times X \to \mathbb{R}^+$ heißt eine *Metrik* auf X, wenn für alle $x,y,z \in X$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(M1) $d(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y$,

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$,

(M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Das Paar (X,d) heißt ein *metrischer Raum*. Für $x,y \in X$ heißt $d(x,y)$ der *Abstand* von x und y. X heißt die *Trägermenge* von (X,d). Die Bedingung (M3) nennt man auch die *Dreiecksungleichung*. Die Elemente von X heißen *Punkte*.

1.1.2 BEISPIELE

(1) Sei X (irgend-)eine Menge. Dann wird durch

$$d_D(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}, \quad x,y \in X$$

eine Metrik auf X definiert. d_D heißt die *diskrete Metrik* auf X. Der Raum (X,d_D) heißt *diskret*.

(2) Für $x,y \in \mathbb{R}$ setze man $d(x,y) := |x-y|$. Dann ist $(\mathbb{R},d)$ ein metrischer Raum.

(3) Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $x = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $y = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n$ setze man $d_E(x,y) := \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \ldots + (x_n-y_n)^2}$. Dann ist $d_E: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ eine Metrik auf $\mathbb{R}^n$. Für $n = 1$ stimmt die Metrik d_E offensichtlich mit der in (2) definierten Metrik d auf $\mathbb{R}$ überein. d_E heißt die *Euklidische Metrik* des $\mathbb{R}^n$. Der Abstand zwischen zwei Punkten $x,y \in \mathbb{R}^n$ ist gleich der Länge des kürzesten Weges von x nach y. Der Raum $(\mathbb{R}^n, d_E)$ heißt der *n-dimensionale Euklidische Raum* und wird im folgenden immer mit $\underline{\mathbb{R}}^n$ bezeichnet. Der Raum $\underline{\mathbb{R}}^1$ wird einfachheitshalber auch mit $\underline{\mathbb{R}}$ bezeichnet.

(4) Ist V ein normierter Vektorraum mit Norm $\| . \|$, so wird durch $d(x,y) = \| x-y \|$ eine Metrik d auf V definiert. Vermöge der so definierten Metrik lassen sich normierte Räume als metrische Räume behandeln.

Daß auf dem $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, auch noch andere als die oben angegebenen Metriken existieren, können Sie sehen, wenn Sie die folgende Aufgabe gelöst haben:

1.1.3 AUFGABE

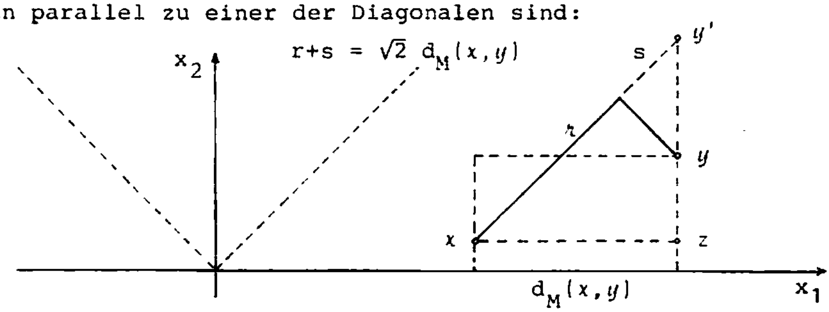
Gegeben sei $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß die folgenden Abbildungen Metriken auf $\mathbb{R}^n$ sind, wenn für alle $x = (x_1,\dots,x_n)$ und $y = (y_1,\dots,y_n)$ aus $\mathbb{R}^n$ gesetzt wird:

(1) $d_M(x,y) := \max\{|x_i - y_i| \mid 1 \le i \le n\}$.

(2) $d_S(x,y) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$.

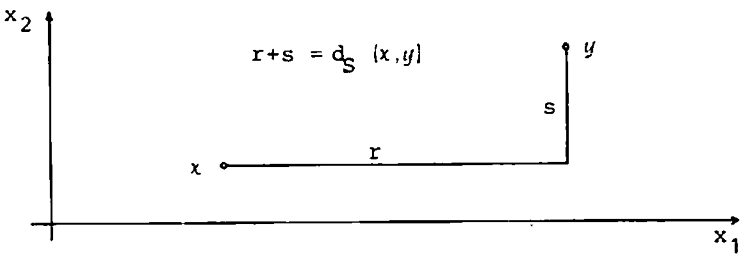
Offenbar gilt für $n = 1$: $d_E = d_M = d_S$.

d_M heißt die *Maximum-Metrik* des $\mathbb{R}^n$. Für $n = 2$, $x,y \in \mathbb{R}^2$ ist $\sqrt{2}d_M(x,y)$ gleich der Länge des kürzesten Streckenzuges von x nach y, dessen Strecken parallel zu einer der Diagonalen sind:



Eine elementargeometrische Begründung für $r+s = \sqrt{2}\, d_M(x,y)$ erhält man, wenn man den klassischen Satz des Pythagoras auf das Hilfsdreieck, das von x, y', z gebildet wird, anwendet.

d_S heißt die *Summen-Metrik* des $\mathbb{R}^n$. Für $n = 2$, $x,y \in \mathbb{R}^2$, ist $d_S(x,y)$ gleich der Länge des kürzesten Streckenzuges von x nach y, dessen Strecken parallel zu den Koordinatenachsen sind:



Deshalb wird d_S für $n = 2$ auch Taxi-Metrik genannt.

1.1.4 BEISPIEL

Sei X eine Menge und $B(X)$ die Menge aller beschränkten reellwertigen Funktionen auf X.

[Im Fall $X=\emptyset$ ist $B(X)=\{i\}$, wobei $i : \emptyset \to \mathbb{R}$ die Inklusionsabbildung ist.] Für $f,g \in B(X)$ setzt man

$$d(f,g) := \begin{cases} 0, & \text{falls } X = \emptyset \\ \sup\limits_{x\in X} |f(x) - g(x)|, & \text{falls } X \neq \emptyset. \end{cases}$$

Damit ist d eine Metrik auf B(X), die sogenannte *Supremum-Metrik*.

Beweis:

Der Fall "$X=\emptyset$" ist klar. Sei $X\neq\emptyset$, und seien $f,g \in B(X)$.

(M1) "$\Rightarrow$" : $d(f,g) = 0 \Rightarrow \sup\limits_{x\in X} |f(x) - g(x)| = 0$

$\Rightarrow f(x) = g(x)\ \forall x \in X \Rightarrow f = g.$

"$\Leftarrow$" : trivial.

(M2) gilt wegen $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|\ \forall x \in X$.

(M3) gilt wegen $|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)|$

$+ |h(x) - g(x)|\ \forall x \in X.$

Man kann sich leicht klar machen, daß für den Fall $X = \{1,2,...,n\}$ der Raum $(B(X),d)$ mit dem Raum $(\mathbb{R}^n,d_M)$ identifiziert werden kann. Dazu betrachte man die bijektive (!) Abbildung, die jeder beschränkten Funktion $f \in B(X)$ das n-Tupel $(f(1),...,f(n))$ zuordnet. Es gilt dann $d(f,g) = d_M((f(1),...,f(n)),(g(1),...,g(n)))$ für alle $f,g \in B(X)$, da für endliche Mengen bekanntlich Supremum- und Maximumbildung übereinstimmen.

1.1.5 BEISPIEL

Sei X eine Menge, $Y:=\{0\} \cup (X \times]0,1])$. Man setzt für $y,y' \in Y$:

$$d(y,y') := \begin{cases} 0 & \text{für } y = y' = 0 \\ r & \text{für } y = 0,\ y' = (x,r) \\ r & \text{für } y = (x,r),\ y' = 0 \\ r + r' & \text{für } y = (x,r),\ y' = (x',r') \text{ und } x \neq x' \\ |r-r'| & \text{für } y = (x,r),\ y' = (x',r') \text{ und } x = x' \end{cases}$$

Dann ist d eine Metrik auf Y.

Beweis:

(M1) "$\Rightarrow$": Seien $y,y' \in Y$, $d(y,y') = 0$. Annahme: $y \neq y'$. Es kann nicht sein, daß $y = 0$ und $y' = (x,r)$ oder $y = (x,r)$ und $y' = 0$. Sonst wäre nämlich $0 \in]0,1]$. Auch $y = (x,r)$, $y' = (x',r')$ mit $x \neq x'$ ist unmöglich. Bleibt also $y = (x,r)$, $y' = (x',r')$ mit $x = x'$. Dann ist aber $r = r'$, also auch $y = y'$. (M1) ist also erfüllt. (Die Richtung "$\Leftarrow$" ist trivial.)

(M2) folgt direkt aus der in y,y' symmetrischen Definition von d.

(M3) Seien $y,y',y'' \in Y$. Zu zeigen ist:

(*) $d(y,y'') \leq d(y,y') + d(y',y'')$.

Sind irgendwelche der drei vorgegebenen Punkte gleich, so ist (*) erfüllt; denn für $y = y''$ gilt $d(y,y'') = 0$, und damit ist (*) automatisch erfüllt, und für $y = y'$ bzw. $y' = y''$ reduziert sich (*) zu einer trivialen Ungleichung $d(y',y'') \leq 0 + d(y',y'')$ bzw. $d(y,y') \leq d(y,y') + 0$.

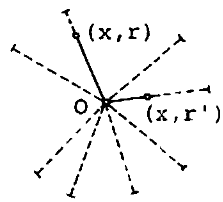
Seien also y, y', y'' paarweise voneinander verschieden. Ist etwa $y = O$, $y' = (x', r')$, $y'' = (x'', r'')$, so ist

$$d(y,y'') = r'' \leq \begin{cases} r' + r' + r'' & \text{für } x' \neq x'' \\ r' + |r' - r''| & \text{für } x' = x'' \end{cases}$$

Die Fälle $y' = O$ bzw. $y'' = O$ verlaufen analog. Sind etwa $y = (x,r)$, $y' = (x',r')$ und $y'' = (x'',r'')$ und ist $x = x' = x''$, so folgt (*) aus der wohlbekannten Dreiecksungleichung von $\mathbb{R}$. Betrachten wir nun einmal den Fall $x \neq x'$, $x' = x''$. Dann ist

$$d(y,y'') = r + r'' \leq r + r' + |r' - r''|.$$

Die anderen noch nicht ausgespielten Fälle untersucht man analog.
Der Raum (Y,d) heißt X-*stacheligen Igel*. Die folgende Zeichnung macht uns den Namen klar:



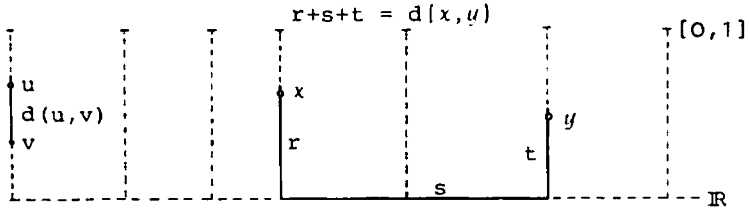
Für jedes $x \in X$ hat (Y,d) einen "Stachel" $\{(x,r) \mid r \in]0,1]\} \cup \{O\}$ und alle Stacheln "beginnen" in dem festen Punkt O.

<u>1.1.6 AUFGABE</u>

Sei $X := \mathbb{R} \times [0,1]$. Für $(x,y),(x',y') \in X$ setze man

$$d((x,y),(x',y')) := \begin{cases} |y - y'|\ , & \text{falls } x = x' \\ |x - x'| + y + y', & \text{falls } x \neq x'\ . \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß d eine Metrik auf X ist.
Die folgende Zeichnung veranschaulicht, daß die Konstruktion dieser Metrik eine "Stacheldrahtproduktion" ist. Man nennt (X,d) oft *Stacheldraht*:



Der folgende Satz bringt uns zwei nützliche Anwendungen der Dreiecksungleichung.

1.1.7 SATZ

Sei (X,d) *ein metrischer Raum.* $x,y,z,w \in X$, $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in X$ *für* $i \in \mathbb{N}_{n+1} = \{1,\dots,n+1\}$. *Dann gilt:*

(1) $d(x_1,x_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^{n} d(x_i,x_{i+1})$.

(2) $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$ (*zweite Dreiecksungleichung*).

(3) $|d(x,y) - d(z,w)| \leq d(x,z) + d(y,w)$ (*Vierecksungleichung*).

1.1.8 BEMERKUNG

Daß man aus einem metrischen Raum auf einfachem Weg sehr viele andere Beispiele für metrische Räume gewinnen kann, zeigt folgende Überlegung: Ist (X,d) ein metrischer Raum und $Y \subset X$, so ist $(Y,d \mid Y \times Y)$ wieder ein metrischer Raum (wobei $d \mid Y \times Y$ die Einschränkung von d auf $Y \times Y$ bezeichnet). Dies veranlaßt uns zu der folgenden

1.1.9 DEFINITION

(X,d) sei ein metrischer Raum, $Y \subset X$. Dann heißt $(Y,d \mid Y \times Y)$ *der durch* Y *bestimmte Teilraum* (oder *Unterraum*) *von* (X,d).

Im allgemeinen wollen wir von nun an, wenn Verwechslungen nicht zu befürchten sind, d.h. wenn die zugrundegelegte Metrik feststeht, einen metrischen Raum (X,d) mit $\underline{X}$ bezeichnen. Ist $Y \subset X$, so wird in diesem Fall der von Y bestimmte Teilraum von $\underline{X}$ mit $\underline{Y}$ bezeichnet. Ebenso wollen wir - wie bereits in 1.1.2 eingeführt - im folgenden, wenn nichts anderes gesagt wird, unter $\underline{\mathbb{R}}^n$ den metrischen Raum $(\mathbb{R}^n,d_E)$ verstehen. Von besonderem Interesse sind Teilräume $\underline{X}$ des $\underline{\mathbb{R}}^n$, so z.B. für $n = 1$ die Teilräume $\underline{\{0,1\}}$, $\underline{]0,1[}$, $\underline{I} := \underline{[0,1]}$, $\underline{\mathbb{Q}}$, $\underline{\mathbb{P}} := \underline{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$, $\underline{\mathbb{N}}$, $\underline{\mathbb{Z}}$.

Es sei in diesem Zusammenhang ausdrücklich darauf hingewiesen, daß es auf einer Menge X i.a. sehr viele verschiedene Metriken gibt. Die Schreibweise $\underline{X}$ macht deshalb nur Sinn, wenn unmißverständlich klar ist, welche Metrik auf X betrachtet wird. Dies ist insbesondere bei den im folgenden eingeführten Standardbezeichnungen zu beachten.

1.1.1o DEFINITION

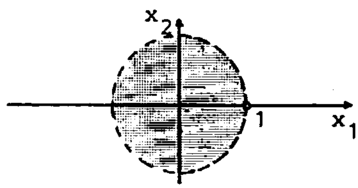
Sei $x \in X$ und r eine positive reelle Zahl. Die *offene Kugel mit Zentrum* x *und Radius* r ist definiert als $S(x,r) := \{y \mid y \in X \text{ und } d(x,y)<r\}$:

Wenn aus dem Zusammenhang nicht eindeutig hervorgeht, welche Metrik d wir auf der Menge X betrachten, so schreiben wir $S_d(x,r)$ statt $S(x,r)$.

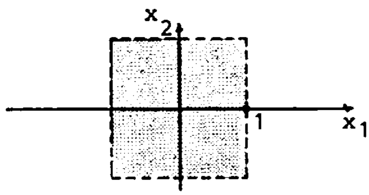
Wie sehen die offenen Kugeln aus?
Einige Skizzen sollen Ihnen hier behilflich sein.
Sie werden sehen, daß - je nach Wahl der Metrik - auch Kugeln vorkommen, die keine Kugeln im herkömmlichen, anschaulichen Sinn sind.

1.1.11 BEISPIELE

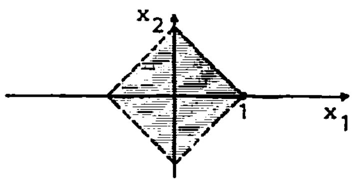
(i) In $(\mathbb{R}^2, d_E)$ hat $S((0,0),1)$ folgende Gestalt:



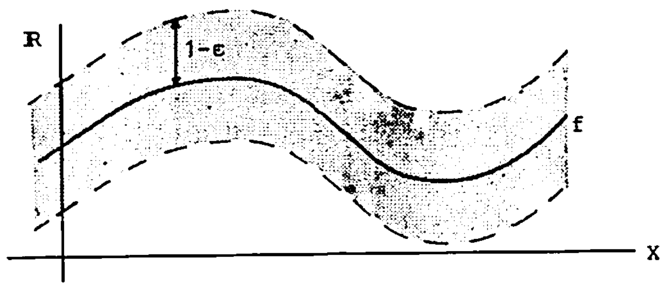
(ii) In $(\mathbb{R}^2, d_M)$ hat $S((0,0),1)$ folgende Gestalt:



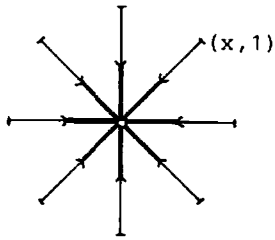
(iii) In $(\mathbb{R}^2, d_S)$ hat $S((0,0),1)$ folgende Gestalt:



(iv) Ist $(B(X),d)$ der Raum der beschränkten reellwertigen Funktionen mit der Supremum-Metrik (vgl. 1.1.4), so besteht für beliebiges $f \in B(X)$ die Menge $\{g \mid g \in B(X),\ d(f,g) < 1\}$ aus allen (automatisch beschränkten) Funktionen $g: X \to \mathbb{R}$, die sich ganz in dem "Schlauch" um f mit Radius $1 - \varepsilon$ mit einem (von g abhängigen) ε, $0 < \varepsilon < 1$, befinden:



(v) Ist (Y,d) ein X-stachliger Igel (vgl. 1.1.5), so hat $S(0,\frac{1}{2})$ folgende Gestalt:



(Beachte: $(x,\frac{1}{2}) \in S(0,\frac{1}{2})$ für jedes $x \in X$.)

1.1.12 AUFGABEN

(1) Zeigen Sie: Eine Abbildung $d: X \times X \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine Metrik auf X, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) für alle $x,y \in X$ gilt: $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$

(b) für alle $x,y,z \in X$ gilt: $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$.

(2) l_∞ sei die Menge aller beschränkten Folgen reeller Zahlen, l_1 sei die Menge aller Folgen (x_n) reeller Zahlen mit $\Sigma|x_n| < \infty$, l_2 sei die Menge aller Folgen (x_n) reeller Zahlen mit $\Sigma x_n^2 < \infty$. Zeigen Sie, daß durch

(a) $d_\infty\ ((x_n),(y_n)) = \mathrm{Sup}\ \{|x_n-y_n|\ |n \in \mathbb{N}\}$ eine Metrik auf l_∞ definiert wird

(b) $d_1\ ((x_n),(y_n)) = \Sigma|x_n-y_n|$ eine Metrik auf l_1 definiert wird

(c) $d_2\ ((x_n),(y_n)) = (\Sigma(x_n-y_n)^2)^{1/2}$ eine Metrik auf l_2 definiert wird.

Die zugehörigen metrischen Räume werden mit l_∞, l_1 bzw. l_2 bezeichnet. Insbesondere heißt l_2 auch Hilbert-Raum. Ferner gilt $l_\infty = B(\mathbb{N})$.

(3) Sei p eine Primzahl. Sind $\frac{m}{n}$ und $\frac{r}{s}$ verschiedene rationale Zahlen, dann existiert eine eindeutig bestimmte ganze Zahl k, so daß $\frac{m}{n} - \frac{r}{s} = p^k \cdot \frac{a}{b}$, wobei a und p bzw. b und p teilerfremd sind.

Definieren Sie $d_p(\frac{m}{n},\frac{r}{s}) = \begin{cases} 0 \text{ falls } \frac{m}{n} = \frac{r}{s} \\ p^{-k} \text{ sonst} \end{cases}$ und zeigen Sie, daß d_p eine Metrik auf $\mathbb{Q}$ ist (d_p heißt p-adische Metrik auf $\mathbb{Q}$).

(4) Sei d eine Pseudometrik auf X, d.h. eine Abbildung $d: X \times X \to \mathbb{R}^+$, die (M2),(M3) und (M1*): "$d(x,x) = 0$ für jedes $x \in X$" erfüllt zeigen. Zeigen Sie:

(a) durch $x\ \rho\ y \Longleftrightarrow d(x,y)$ wird eine Äquivalenzrelation ρ auf X definiert.

(b) auf der Menge $X/_\rho$ der ρ-Äquivalenzklassen $[x]_\rho$ von X gibt es genau eine Metrik d' mit $d'([x]_\rho,[y]_\rho) = d(x,y)$ für alle $x \in X$ und $y \in X$. ($(X/_\rho,d')$ heißt auch metrische Reflektion von (X,d)).

1.2 PUNKTE UND MENGEN IN METRISCHEN RÄUMEN

Im folgenden sei $(X,d) = \underline{X}$ *ein metrischer Raum;* $A,B,\ldots$ *seien Teilmengen von* X*;* $x,y,\ldots$ *seien Elemente von* X.

1.2.1 DEFINITION

Für $A,B \subset X$ führt man den *Abstand von* A *und* B durch

$$\operatorname{dist}(A,B) := \begin{cases} \infty\,, & \text{falls } A = \emptyset \text{ oder } B = \emptyset \\ \inf\,\{d(a,b) \mid a \in A, b \in B\}\,, & \text{falls } A \neq \emptyset \neq B. \end{cases}$$

Offensichtlich gilt $\operatorname{dist}(\{x\},\{y\}) = d(x,y)$.
Der *Abstand zwischen einem Punkt* x *und einer Menge* $A \subset X$ wird eingeführt durch

$$\operatorname{dist}(x,A) := \operatorname{dist}(\{x\},A).$$

Die Abkürzung dist kommt vom englischen Wort distance (= Abstand, Entfernung).
Bei der Definition des Abstandbegriffes von Mengen in einem metrischen Raum wird die gegebene Metrik verwendet; der Abstand $\operatorname{dist}(A,B)$ von A und B hängt also von der Metrik d des metrischen Raumes (X,d) ab. Wenn aus dem Zusammenhang nicht eindeutig klar ist, welche Metrik auf X gerade betrachtet wird, so müßte man etwa $\operatorname{dist}_d(A,B)$ schreiben, um Mißverständnissen vorzubeugen.

1.2.2 SATZ

Es seien $A,A', B \subset X$. *Dann gilt:*
(1) $\operatorname{dist}(A,B) = \infty \Longleftrightarrow (A = \emptyset$ *oder* $B = \emptyset)$.
(2) $\operatorname{dist}(A,B) = \operatorname{dist}(B,A)$.
(3) $A \subset A' \Rightarrow \operatorname{dist}(A',B) \leq \operatorname{dist}(A,B)$.
(4) $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \operatorname{dist}(A,B) = 0$.

Beweis:
(1) folgt direkt aus der Definition 1.2.1.
(2) Ist $A = \emptyset$ oder $B = \emptyset$ so ist $\operatorname{dist}(A,B) = \infty = \operatorname{dist}(B,A)$. Für $A \neq \emptyset \neq B$ folgt (2) aus 1.1.1 (M2).
(3) Ist $A = \emptyset$, so ist auf alle Fälle $\operatorname{dist}(A',B) \leq \infty$. Für $B = \emptyset$ ist $\operatorname{dist}(A',B) = \infty = \operatorname{dist}(A,B)$.
Für $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$ ist

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(A',B) &= \inf\,\{d(a',b) \mid a' \in A',\ b \in B\} \\ &\leq \inf\ d(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\} \\ &= \operatorname{dist}(A,B). \end{aligned}$$

(4) Ist $a \in A \cap B$, so ist $\operatorname{dist}(A,B) \leq d(a,a) = 0$; also ist $\operatorname{dist}(A,B) = 0$.

1.2.3 DEFINITION

$A, B \subset X$ heißen genau dann *benachbart*, wenn $\mathrm{dist}(A,B) = 0$ ist. Ein Punkt x heißt *Berührpunkt von* A, wenn $\mathrm{dist}(x,A) = 0$ gilt.

1.2.4 SATZ

Seien $A \subset X$ *und* $x \in X$. *Dann gilt:*
x *ist genau dann Beührpunkt von* A *wenn jede offene Kugel mit Zentrum* x *die Menge* A *trifft* (d.h. mit A einen nicht-leeren Durchschnitt hat).

Beweis:

"$\Rightarrow$" Sei $S(x,r)$ eine offene Kugel mit Zentrum x und x Berührpunkt von A, d.h. $0 = \mathrm{dist}(x,A)$. Dann gibt es zu $r > 0$ einen Punkt $y \in A$ mit $d(x,y) < r$, also $y \in S(x,r) \cap A$.

"$\Leftarrow$" Sei $r > 0$ vorgegeben. Dann gibt es voraussetzungsgemäß einen Punkt $y \in A$ mit $y \in S(x,r) \cap A$. Daraus folgt unmittelbar $d(x,y) < r$. Da $r > 0$ beliebig gewählt war, schließt man $\mathrm{dist}(x,A) = 0$.

1.2.5 SATZ

Gibt es einen Punkt, der sowohl Berührpunkt von A *als auch Berührpunkt von* B *ist, so sind* A *und* B *benachbart.*

Beweis:

Sei x ein gemeinsamer Berührpunkt von A und B. Dann gibt es zu jeder positiven reellen Zahl r Elemente $a \in A$, $b \in B$ mit $d(x,a) \le \frac{r}{2}$ und $d(x,b) \le \frac{r}{2}$. Hieraus folgt

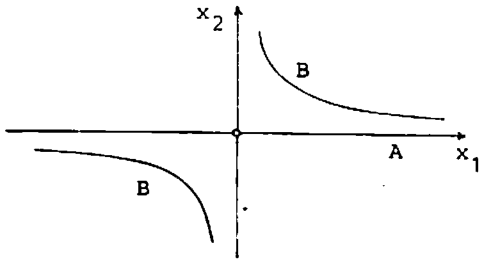
$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(A,B) &\le d(a,b)\\ &\le d(a,x) + d(x,b) = d(x,a) + d(x,b)\\ &\le \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.\end{aligned}$$

Da r beliebig war, muß $\mathrm{dist}(A,B) = 0$ sein.

Daß die Umkehrung der Aussage dieses Satzes i.a. nicht richtig ist, zeigt das folgende

1.2.6 BEISPIEL

Benachbarte Mengen brauchen keinen gemeinsamen Berührpunkt zu haben. So sind im 2-dimensionalen Euklidischen Raum $\mathbb{R}^2$ die Mengen $A = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ und $B = \{(x,\frac{1}{x}) \mid x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\}$ benachbart, haben aber keinen gemeinsamen Berührpunkt.



<u>1.2.7 SATZ</u> *(Eigenschaften der Nachbarschaftsrelation)*
Seien $A,B,C \subset X$. *Dann gilt:*
(1) A *und* B *benachbart* $\Rightarrow A \neq \emptyset \neq B$.
(2) A *und* B *benachbart* $\Rightarrow$ B *und* A *benachbart.*
(3) A *und* B *benachbart und* $B \subset C \Rightarrow$
A *und* C *benachbart.*
(4) A *und* $B \cup C$ *benachbart* $\Rightarrow$ (A *und* B *benachbart*)
oder (A *und* C *benachbart*).
(5) $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow$ A *und* B *benachbart.*

Beweis:
(1) folgt unmittelbar aus 1.2.2(1).
(2) folgt aus 1.2.2(2).
(3) folgt aus 1.2.2(3).
(4) folgt aus der Gleichung
$\mathrm{dist}(A,B \cup C) = \min\{\mathrm{dist}(A,B), \mathrm{dist}(A,C)\}$, die Sie selbst beweisen sollen.
(5) folgt aus 1.2.2(4).

<u>1.2.8 FOLGERUNG</u> *(Eigenschaften der Berührpunkt-Relation)*
Seien $A,B \subset X$, $x \in X$. *Dann gilt:*
(1) x *Berührpunkt von* A $\Rightarrow A \neq \emptyset$.
(2) x *Berührpunkt von* A, $A \subset B \Rightarrow$ x *Berührpunkt von* B.
(3) x *Berührpunkt von* $A \cup B$ $\Rightarrow$ x *Berührpunkt von* A
oder x *Berührpunkt von* B.
(4) $x \in A \Rightarrow$ x *Berührpunkt von* A.

<u>1.2.9 DEFINITION</u>
Für $A \subset X$ definiert man

$$\mathrm{cl}(A) := \{x \mid x \in X \text{ und } x \text{ ist Berührpunkt von } A\}.$$

Meist schreibt man nur clA. clA heißt die *abgeschlossene Hülle* von A.
cl ist die Abkürzung des englischen Wortes closure (= Abschluß).
Mit Definition 1.2.3 gilt offensichtlich:

$$\mathrm{cl}A = \{x \mid x \in X \text{ und } \mathrm{dist}(x,A) = 0\}.$$

1.2.1o SATZ

Für $A, B \subset X$ *ist stets* $\mathrm{dist}(A,B) = \mathrm{dist}(\mathrm{cl}A, B)$.

Beweis:

Offenbar gilt $A \subset \mathrm{cl}A$ nach 1.2.8(4), also $\mathrm{dist}(\mathrm{cl}A,B) \leq \mathrm{dist}(A,B)$ (1.2.2(3)). Seien $A,B \neq \emptyset$. Weiter sei r eine beliebige positive reelle Zahl. Dann existieren $b \in B$ und $c \in \mathrm{cl}A$ mit $d(c,b) \leq \mathrm{dist}(\mathrm{cl}A,B) + \frac{r}{2}$ und, da c Berührpunkt von A ist, gibt es einen Punkt $a \in A$ mit $d(a,c) \leq \frac{r}{2}$. Insgesamt folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung: $\mathrm{dist}(A,B) \leq d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) \leq \mathrm{dist}(\mathrm{cl}A,B) + r$. Dann ist aber, da $r >$ beliebig war, auch $\mathrm{dist}(A,B) \leq \mathrm{dist}(\mathrm{cl}A,B)$.
Ist $B = \emptyset$, so gilt mit 1.2.2(1) sicherlich $\mathrm{dist}(A,B) = \infty = \mathrm{dist}(\mathrm{cl}A,B)$.
Ist $A = \emptyset$, so hat A wegen 1.2.8(1) keinen Berührpunkt, d.h. $\mathrm{cl}A = \emptyset$, und wir schließen wieder mit 1.2.2(1) die Gleichung $\mathrm{dist}(A,B) = \infty = \mathrm{dist}(\mathrm{cl}A,B)$.

1.2.11 SATZ *(Eigenschaften der abgeschlossenen Hülle)*

Seien $A,B \subset X$. *Dann gilt:*

(1) $\mathrm{cl}\emptyset = \emptyset$

(2) $A \subset \mathrm{cl}A$.

(3) $A \subset B \Rightarrow \mathrm{cl}A \subset \mathrm{cl}B$.

(4) $\mathrm{cl}(A \cup B) = \mathrm{cl}A \cup \mathrm{cl}B$.

(5) $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}A) = \mathrm{cl}A$.

Beweis:

(1): 1.2.8(1); (2): 1.2.8(4); (3): 1.2.8(2).

(4) Wegen $A,B \subset A \cup B$ gilt nach (3) $\mathrm{cl}A$, $\mathrm{cl}B \subset \mathrm{cl}(A \cup B)$, also auch $\mathrm{cl}A \cup \mathrm{cl}B \subset \mathrm{cl}(A \cup B)$. Aus 1.2.8(3) folgt $\mathrm{cl}(A \cup B) \subset \mathrm{cl}A \cup \mathrm{cl}B$.

(5) Aus (2) folgt $\mathrm{cl}A \subset \mathrm{cl}(\mathrm{cl}A)$. Gilt $x \in \mathrm{cl}(\mathrm{cl}A)$, so gilt nach 1.2.3 $\mathrm{dist}(x,\mathrm{cl}A) = 0$ und wegen 1.2.1o $\mathrm{dist}(x,A) = 0$, also $x \in \mathrm{cl}A$. Somit gilt auch $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}A) \subset \mathrm{cl}A$.

1.2.12 DEFINITION

Eine Menge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, wenn $A = \mathrm{cl}A$ gilt, d.h. wenn A alle Berührpunkte von A enthält oder, äquivalent dazu, $A = \{x \mid x \in X$ und $\mathrm{dist}(x,A) = 0\}$ gilt.

Der folgende Satz rechtfertigt den Namen "abgeschlossene Hülle von A" für clA.

1.2.13 SATZ

$\mathrm{cl}A$ *ist die kleinste* A *umfassende abgeschlossene Teilmenge von* X.

Beweis:
Wegen 1.2.11(2) umfaßt clA die Menge A und ist nach 1.2.11(5) abgeschlossen. Ist $A \subset B \subset X$ und B abgeschlossen, so ist andererseits wegen 1.2.11(3) $clA \subset clB = B$. Jede A umfassende abgeschlossene Teilmenge B von X umfaßt also auch clA. Folglich ist clA die kleinste Teilmenge von X mit der Eigenschaft, abgeschlossen zu sein und A zu umfassen.

1.2.14 SATZ (*Eigenschaften abgeschlossener Mengen*)
(1) *$\emptyset$ und X sind abgeschlossen.*
(2) *Sind A und B abgeschlossen, so ist $A \cup B$ abgeschlossen.*
(3) *Ist $\mathcal{A}$ eine Menge abgeschlossener Teilmengen von X, so ist* $\cap\mathcal{A} := \{x \in X \mid \forall\, A \in \mathcal{A}\ x \in A\}$ *abgeschlossen.*

Beweis:
(1) und (2) folgen unmittelbar aus 1.2.11(1) bzw. 1.2.11(2) für A = X und aus 1.2.11(4).
(3) Für jedes $A \in \mathcal{A}$ gilt $\cap\mathcal{A} \subset A$, woraus gemäß 1.2.11(3) $cl(\cap\mathcal{A}) \subset clA = A$ folgt. Also ist $cl(\cap\mathcal{A}) \subset \bigcap_{A\in\mathcal{A}} clA = \cap\mathcal{A}$; die umgekehrte Inklusion ist wegen 1.2.12(2) trivial. Es folgt $cl(\cap\mathcal{A}) = \cap\mathcal{A}$.

1.2.15 DEFINITION
Ein Punkt $x \in X$ heißt *innerer Punkt von* $B \subset X$, wenn es eine positive reelle Zahl r mit $S(x,r) \subset B$ gibt.

1.2.16 SATZ
x ist genau dann innerer Punkt von B, wenn x nicht Berührpunkt von $X \setminus B$ ist.

Beweis:
x ist genau dann innerer Punkt von B, wenn ein $r > 0$ mit $S(x,r) \subset B$, oder äquivalent $S(x,r) \cap (X\setminus B) = \emptyset$, existiert. Nach 1.2.4 bedeutet dies genau, daß x nicht Berührpunkt von $X\setminus B$ ist.

1.2.17 DEFINITION
Für $B \subset X$ definiert man

$$int(B) = \{x \mid x \in X \text{ und } x \text{ ist innerer Punkt von } B\}.$$

Meist schreibt man nur intB. intB heißt der *offene Kern von* B oder das *Innere von* B. int ist die Abkürzung des englischen Wortes interior (= Inneres).

1.2.18 SATZ

Für $B \subset X$ *ist* $\mathrm{int}B = X \setminus \mathrm{cl}(X \setminus B)$.

Beweis:

folgt unmittelbar aus 1.2.9 und 1.2.16.

1.2.19 SATZ (*Eigenschaften des offenen Kerns*)

Seien $A, B \subset X$. *Dann gilt:*

(1) $\mathrm{int}X = X$.

(2) $\mathrm{int}A \subset A$.

(3) $B \subset A \Rightarrow \mathrm{int}B \subset \mathrm{int}A$.

(4) $\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}A \cap \mathrm{int}B$.

(5) $\mathrm{int}(\mathrm{int}A) = \mathrm{int}A$.

Beweis:

Man kann die Aussagen entweder mit Hilfe der Definitionen 1.2.17 und 1.2.15 direkt beweisen oder wegen 1.2.18 auf die in 1.2.11 bereits bewiesenen "dualen" Aussagen für cl zurückführen. Für den Fall von (4) führen wir dies unter Verwendung von 1.2.11(4) exemplarisch vor:

$$\begin{aligned} \mathrm{int}(A \cap B) &= X \setminus \mathrm{cl}(X \setminus (A \cap B)) \\ &= X \setminus \mathrm{cl}((X \setminus A) \cup (X \setminus B)) \\ &= X \setminus (\mathrm{cl}(X \setminus A) \cup \mathrm{cl}(X \setminus B)) \\ &= (X \setminus \mathrm{cl}(X \setminus A)) \cap (X \setminus \mathrm{cl}(X \setminus B)) \\ &= \mathrm{int}A \cap \mathrm{int}B. \end{aligned}$$

1.2.2o DEFINITION

Eine Menge $B \subset X$ heißt *offen*, wenn $B = \mathrm{int}B$ gilt, d.h. wenn jeder Punkt von B innerer Punkt von B ist, d.h. wenn zu jedem $x \in B$ ein $r > 0$ mit $S(x,r) \subset B$ existiert.

Der folgende Satz rechtfertigt den Namen "offene Kugel" für die in Definition 1.1.1o eingeführte Teilmenge $S(x,r)$:

1.2.21 SATZ

Für $x \in X$ *und* $r > 0$ *ist* $S(x,r)$ *offen*.

Beweis:

Sei $y \in S(x,r)$ ein beliebiger Punkt. Dann ist $d(x,y) < r$, also $\delta := r - d(x,y) > 0$. Für alle $z \in X$ mit $z \in S(y,\delta)$, d.h. $d(y,z) < r - d(x,y)$ oder äquivalent dazu $d(x,y) + d(y,z) < r$, folgt mittels der Dreiecksungleichung $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < r$ und somit $z \in S(x,r)$. Wir haben $S(y,\delta) \subset S(x,r)$ und damit die Offenheit von $S(x,r)$ nachgewiesen.

1.2.22 SATZ

Eine Menge $B \subset X$ *ist genau dann offen, wenn ihr Komplement* $X \setminus B$ *abgeschlossen ist.*

Beweis:

$$\begin{array}{lll} B \text{ offen} \iff & B = \mathrm{int}B & (1.2.2o) \\ \iff & X\setminus B = X\setminus \mathrm{int}B & \\ \iff & X\setminus B = X\setminus(X\setminus \mathrm{cl}(X\setminus B)) & (1.2.18) \\ \iff & X\setminus B = \mathrm{cl}(X\setminus B) & \\ \iff & X\setminus B \quad \text{abgeschlossen} & (1.2.12). \end{array}$$

1.2.23 SATZ *(Eigenschaften offener Mengen)*

(1) $\emptyset$ *und* X *sind offen.*

(2) *Sind* A *und* B *offen, so ist* $A \cap B$ *offen.*

(3) *Ist* $\mathcal{B}$ *eine Menge offener Mengen, so ist* $\cup\,\mathcal{B} := \{x \in X \mid \exists B \in \mathcal{B}\ x \in B\}$ *offen.*

Beweis:

Wegen 1.2.22 folgt alles unmittelbar aus 1.2.14 durch Komplementbildung, denn es gelten nach de Morgan die Gesetze $X\setminus(A\cap B) = (X\setminus A)\cup(X\setminus B)$ und $X\setminus\cup\mathcal{B} = \cap\{X\setminus B \mid B \in \mathcal{B}\}$.

Natürlich kann man die Aussagen des Satzes auch direkt unter Verwendung der Definition 1.2.21 beweisen:

(1) gilt trivialerweise.

(2) Sei $x \in A \cap B$. Wegen der Offenheit von A und B gibt es dann $r > 0$ und $s > 0$ mit $S(x,r) \subset A$ und $S(x,s) \subset B$. Offensichtlich gilt dann für $t = \min\{r,s\} > 0$ die gewünschte Inklusion $S(x,t) \subset A \cap B$.

(3) Sei $x \in \cup\,\mathcal{B}$. Dann gibt es ein $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B$ und aufgrund der Offenheit von B ein $r > 0$ mit $S(x,r) \subset B$. Dann gilt natürlich erst recht $S(x.r) \subset \cup\,\mathcal{B}$, d.h. $\cup\,\mathcal{B}$ ist offen.

Die Bezeichnung "offener Kern" aus 1.2.17 rechtfertigt der folgende

1.2.24 SATZ

Für $B \subset X$ *ist* $\mathrm{int}B$ *die größte offene Teilmenge von* B.

Beweis:

Nach 1.2.19(5) ist $\mathrm{int}B = \mathrm{int}(\mathrm{int}B)$ offen. Sei A eine offene Menge mit $A \subset B$. Dann ist nach 1.2.22 $X\setminus A$ abgeschlossen. Wegen $X\setminus B \subset X\setminus A$ folgt mit 1.2.13 $\mathrm{cl}(X\setminus B) \subset X\setminus A$, also mit 1.2.18

$$A \subset X\setminus \mathrm{cl}(X\setminus B) = \mathrm{int}B.$$

Jede offene Teilmenge A von B ist also in der offenen Teilmenge $\mathrm{int}B$ enthalten. Folglich ist $\mathrm{int}B$ die größte offene Teilmenge von B.

1.2.25 DEFINITION

Seien $x \in X$, $A \subset X$, $U \subset X$.

(1) U heißt *Umgebung von* x, wenn x innerer Punkt von U ist, d.h. wenn es ein $r > 0$ mit $S(x,r) \subset U$ gibt.

(2) U heißt *Umgebung von* A, wenn U Umgebung jedes Punktes von A ist, d.h. wenn es für jedes $a \in A$ ein $r = r(a) > 0$ mit $S(a,r) \subset U$ gibt.

(3) U heißt *gleichmäßige Umgebung von* A, wenn es ein $r > 0$ gibt, so daß für alle $a \in A$ gilt: $S(a,r) \subset U$.

1.2.26 SATZ

Seien $x \in X$ *und* $A,U \subset X$.

(1) U *Umgebung von* $A \Rightarrow A \subset U$.

(2) U *gleichmäßige Umgebung von* A $\Rightarrow$ U *Umgebung von* A.

(3) *Äquivalent sind:*

(a) U *Umgebung von* x.

(b) U *Umgebung von* $\{x\}$

(c) U *gleichmäßige Umgebung von* $\{x\}$.

Beweis:

Alle Aussagen sind unmittelbare Konsequenzen aus der vorangegangenen Definition 1.2.25.

Die folgende Aufgabe belegt, daß die Umkehrung der Aussage 1.2.26(2) im allgemeinen nicht gilt.

1.2.27 AUFGABE

In $\mathbb{R}$ sei $U := \bigcup\{]n - \frac{1}{n}, n + \frac{1}{n}[\mid n \in \mathbb{N}\}$,

$A := \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(1) U ist Umgebung von A.

(2) U ist keine gleichmäßige Umgebung von A.

1.2.28 SATZ

Seien $x \in X$ *und* $A,U \subset X$.

(1) U *ist Umgebung von* x *genau dann, wenn* x *kein Berührpunkt von* $X\backslash U$ *ist.*

(2) U *ist gleichmäßige Umgebung von* A *genau dann, wenn* A *und* $X\backslash U$ *nicht benachbart sind.*

Beweis:

(1)·Ist U Umgebung von x, so gibt es ein $r > 0$ mit $S(x,r) \subset U$. Folglich gilt

$\mathrm{dist}(x,X\backslash U) \geq \mathrm{dist}(x,X\backslash S(x,r)) \geq r > 0$, und x ist also nicht Berühr-

punkt von $X \setminus U$. Ist andererseits $\operatorname{dist}(x, X\setminus U) =: r > 0$, so folgt $S(x,r) \subset U$, und x ist innerer Punkt von U, U also Umgebung von x.
(2) Ist U gleichmäßige Umgebung von A, so gibt es ein $r > 0$ mit $\bigcup_{a\in A} S(a,r) \subset U$, und damit ist für alle $a \in A$ und alle $y \in X\setminus U$ der Abstand $d(a,y) \geq r$; denn wäre $d(a,y) < r$, so ergäbe sich der Widerspruch $y \in S(a,r) \subset U$. Folglich gilt dann $\operatorname{dist}(A, X\setminus U) \geq r$, und somit sind die Mengen $X\setminus U$ und A nicht benachbart.
Gilt umgekehrt $\operatorname{dist}(A, X\setminus U) =: r > 0$, so schließen wir unmittelbar die Inklusion $S(a,r) \subset U$ für alle $a \in A$; dann gäbe es eine Kugel $S(a,r)$ mit $S(a,r) \not\subset U$, d.h. $S(a,r) \cap (X\setminus U) \neq \emptyset$, so existierte ein $y \in X\setminus U$ mit $d(a,y) < r$ im Widerspruch zu $\operatorname{dist}(A, X\setminus U) = r$. U ist damit als gleichmäßige Umgebung von A nachgewiesen.

<u>1.2.29 SATZ</u> (*Eigenschaften von Umgebungen*)
Seien $A, B, U, V \subset X$. *Dann gilt:*
(1) U *(gleichmäßige) Umgebung von* A, $B \subset A$, $U \subset V$
$\Rightarrow V$ *(gleichmäßige) Umgebung von* B.
(2) U, V *(gleichmäßige) Umgebung von* A
$\Rightarrow U \cap V$ *(gleichmäßige) Umgebung von* A.
(3) U *gleichmäßige Umgebung von* A
$\Rightarrow U$ *gleichmäßige Umgebung von* $\operatorname{cl} A$.

Beweis:
(1) Ist U Umgebung von A, so gibt es für jedes $b \in B \subset A$ ein $r = r(b)$ mit $S(b,r) \subset U \subset V$, d.h. V ist Umgebung von B.
Ist U gleichmäßige Umgebung von A, so gibt es ein $r > 0$ mit $S(a,r) \subset U$ für alle $a \in A$, also erst recht $S(b,r) \subset U \subset V$ für alle $b \in B$; d.h. V ist gleichmäßige Umgebung von B.
(2) Sind U, V Umgebungen von A, so gibt es zu einem $a \in A$ reelle Zahlen $r = r(a) > 0$, $s = s(a) > 0$ mit $S(a,r) \subset U$, $S(a,s) \subset V$ und folglich gilt für $t := \min\{r,s\}$ $S(a,t) \subset U \cap V$ und wir haben $U \cap V$ als Umgebung von A nachgewiesen.
Sind U, V gleichmäßige Umgebungen von A, so sind nach 1.2.28(2), sowohl $X\setminus U$ und A als auch $X\setminus V$ und A nicht benachbart. Wäre $U \cap V$ keine gleichmäßige Umgebung von A, so wären nach 1.2.28(2) $X\setminus(U \cap V) = (X\setminus U)\cup(X\setminus V)$ und A benachbart und gemäß 1.2.7(4) wäre demnach $X\setminus U$ und A oder $X\setminus V$ und A benachbart. Widerspruch.
(3) Ist U gleichmäßige Umgebung von A, so gilt gemäß 1.2.28(2) $\operatorname{dist}(A, X\setminus U) > 0$ und mit 1.2.1o folgt $\operatorname{dist}(A, X\setminus U) = \operatorname{dist}(\operatorname{cl}A, X\setminus U) > 0$, d.h. wiederum nach 1.2.28(2) ist U gleichmäßige Umgebung von $\operatorname{cl}A$.

1.2.3o BEMERKUNG

Ist U gleichmäßige Umgeb ung von A, so ist U gleichmäßige Umgebung von clA. Das gilt für Umgebungen nicht, d.h. in 1.2.29(3) kann das Wort "gleichmäßige" nicht unterdrückt werden. So ist im eindimensionalen Euklidischen Raum $\underline{\mathbb{R}}$ die Menge $U =]0,1[$ Umgebung von sich selbst, aber es gilt $\mathrm{cl}U = [0,1] \not\subset U$.

1.2.31 BEISPIELE

(1) Sei (X,d_D) diskret. Dann gilt:

(i)
$$\mathrm{dist}(A,B) = \begin{cases} 0, \text{ falls } A \cap B \neq \emptyset \\ 1, \text{ falls } A \cap B = \emptyset \text{ und } A \neq \emptyset \neq B \\ \infty, \text{ falls } A = \emptyset \text{ oder } B = \emptyset. \end{cases}$$

(ii) A und B benachbart $\Longleftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

(iii) x Berührpunkt von A $\Longleftrightarrow x \in A \Longleftrightarrow$ A ist Umgebung von x.

(iv) $\mathrm{cl}A = \mathrm{int}A = A$ für jede Teilmenge A von X.

(v) Jede Teilmenge von X ist sowohl offen als auch abgeschlossen.

(vi)
$$S(x,r) = \begin{cases} \{x\}, & \text{falls } r \leq 1 \text{ und } r > 0 \\ X, & \text{falls } r > 1 \end{cases}$$

(vii) U ist gleichmäßige Umgebung von A $\Longleftrightarrow$
U ist Umgebung von A $\Longleftrightarrow A \subset U$.

(viii) Enthält X mindestens zwei Punkte, so gilt insbesondere:
$\{x\} = \mathrm{cl}(S(x,1)) \neq \{y \mid y \in X \text{ und } d_D(x,y) \leq 1\} = X$.

(2) Für den n-dimensionalen Euklidischen Raum $\underline{\mathbb{R}}^n = (\mathbb{R}^n, d_E)$ decken sich die Begriffe, die wir hier eingeführt haben, mit den Ihnen aus der Analysis bekannten.

(3) Für Teilmengen A,B des $\underline{\mathbb{R}}^n$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(a) A und B sind benachbart bezüglich der Euklidischen Metrik d_E.

(b) A und B sind benachbart bezüglich der Maximum-Metrik d_M.

(c) A und B sind benachbart bezüglich der Summen-Metrik d_S.

Beweis:

Seien $x,y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $y = (y_1,\ldots,y_n)$.

(a) $\Rightarrow$ (b) : Wegen $\max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i| \leq (\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ und der Voraussetzung gibt es zu $r > 0$ Punkte $x \in A$, $y \in B$ mit $d_M(x,y) \leq d_E(x,y) < r$.

(b) $\Rightarrow$ (c): Wegen $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq n \cdot \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$ und der Voraussetzung gibt es zu $r > 0$ Punkte $x \in A$, $y \in B$ mit $d_S(x,y) \leq n \cdot d_M(x,y) < r$.

(c) $\Rightarrow$ (a): Wegen $\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ und der Voraussetzung gibt es zu $r > 0$ Punkte $x \in A$, $y \in B$ mit $d_E(x,y) \leq d_S(x,y) < r$.

Hieraus folgt insbesondere, daß sich auch für die Räume $(\mathbb{R}^n, d_M)$ und $(\mathbb{R}^n, d_S)$ der Begriff "Berührpunkt" und dann auch die Begriffe "abgeschlossene Hülle, abgeschlossen, Umgebung, offen, offener Kern" mit den bekannten Begriffen aus der Analysis decken. So gilt zum Beispiel unter Verwendung von 1.2.28 und 1.2.31(3) folgende Überlegung: U ist Umgebung von A bzgl. d_E $\Longleftrightarrow$ A und X\U sind nicht benachbart bzgl. d_E $\Longleftrightarrow$ A und X\U sind nicht benachbart bzgl. d_M $\Longleftrightarrow$ U ist Umgebung von A bzgl. d_M.
Ganz analog kann man die Äquivalenz aller weiteren, genannten Begriffe herleiten. Dieses merkwürdige Phänomen der "Gleichwertigkeit" von Metriken werden wir in § 2 genauer analysieren.

(4) Ist $\underline{X}$ ein Teilraum von $\underline{Y}$, so gilt für $A, B \subset X$, $x \in X$:

(i) A und B sind benachbart in $\underline{X}$ $\Longleftrightarrow$
A und B sind benachbart in $\underline{Y}$.

(ii) x ist Berührpunkt von A in $\underline{X}$ $\Longleftrightarrow$
x ist Berührpunkt von A in $\underline{Y}$.

(iii) B ist (gleichmäßige) Umgebung von A in $\underline{X}$ $\Longleftrightarrow$
Es gibt eine (gleichmäßige) Umgebung $B' \subset Y$ von A in $\underline{Y}$ mit $B = B' \cap X$.

(iv) A ist offen (abgeschlossen) in $\underline{X}$ $\Longleftrightarrow$
Es gibt eine offene (abgeschlossene) Teilmenge A' von $\underline{Y}$ mit $A = A' \cap X$.

1.2.32 AUFGABEN

Zeigen Sie:

(1)(a) $\mathrm{cl}A = X\backslash \mathrm{int}(X\backslash A)$

(b) A und B sind genau dann benachbart, wenn X\B keine gleichmäßige Umgebung von A ist

(c) x ist genau dann Berührpunkt von $A\backslash\{x\}$, wenn $U \cap A$ für jede Umgebung U von x unendlich ist.

(2) Ist A endlich, so gilt:

(a) A ist abgeschlossen

(b) jede Umgebung von A ist gleichmäßige Umgebung von A.

(3) In einem metrischen Raum gilt:

(a) jede Menge läßt sich als Vereinigung abgeschlossener Mengen darstellen

(b) jede Menge läßt sich als Durchschnitt offener Mengen darstellen

(c) jede offene Menge läßt sich als Vereinigung höchstens abzählbar vieler abgeschlossener Mengen darstellen.

(d) jede abgeschlossene Menge läßt sich als Durchschnitt höchstens abzählbar vieler offener Mengen darstellen.

(4) Ist $\mathrm{fr}A = \mathrm{cl}A \cap \mathrm{cl}(X\setminus A)$ der Rand (englisch: frontier) von A, so gilt:

(a) $\mathrm{cl}A = A \cup \mathrm{fr}A$

(b) $\mathrm{int}A = A\setminus\mathrm{fr}A$.

(5) (a) int cl int clA = int clA

(b) cl int cl intA = cl intA.

(c) Geben Sie eine Teilmenge A von $\mathbb{R}$ an, für die die sieben Mengen A , int A, clA, int clA, cl int A, int cl int A und cl int clA paarweise verschieden sind.

(6) Ist $K(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) \leq r\}$ die abgeschlossene Kugel mit Zentrum x und Radius r, so gilt:

(a) $K(x,r)$ ist abgeschlossen in $\underline{X}$

(b) $\mathrm{cl}S(x,r) \subset K(x,r)$

(c) in $\mathbb{R}^n$ gilt für $r > 0$ stets $\mathrm{cl}S(x,r) = K(x,r)$.

(7) Ein metrischer Raum heißt ultrametrisch, falls er die verschärfte Dreiecksungleichung $d(x,y) \leq \mathrm{Max}\ \{d(x,z), d(y,z)\}$ für alle x,y,z erfüllt.

(a) für jede Primzahl p ist der p-adische Raum $(\mathbb{Q},d_p)$ ultrametrisch (vergl. 1.1.12(3))

(b) jeder diskrete metrische Raum ist ultrametrisch

(c) in einem ultrametrischen Raum ist jede offene Kugel $S(x,r)$ abgeschlossen und jede abgeschlossene Kugel $K(x,r)$ offen

(d) in einem ultrametrischen Raum gilt für offene Kugeln:

1) $S(x,r) \cap S(y,s) \neq \emptyset \Rightarrow (S(x,r) \subset S(y,s)$ oder $S(y,s) \subset S(x,r))$

2) $S(x,r) \cap S(y,r) \neq \emptyset \Rightarrow (S(x,r) = S(y,r)$

3) $S(x,r) \cap S(y,r) = \emptyset \Rightarrow \mathrm{dist}\ (S(x,r), S(y,r)) \geq r$.

(e) jeder ultrametrische Raum ist für jedes $r > 0$ disjunkte Vereinigung offener Kugeln $S(x,r)$.

(8) Für jede Menge X wird auf $X^{\mathbb{N}}$ durch

$$d((x_n),(y_n)) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mathrm{Min}\{n \mid x_n \neq y_n\}} & \text{, falls } (x_n) \neq (y_n) \\ 0 & \text{, falls } (x_n) = (y_n) \end{cases}$$

eine Metrik d definiert. $\mathrm{Bair}(X)=(X,d)$ ist ein ultrametrischer Raum.

1.3 FOLGEN

Im folgenden seien (X,d) ein metrischer Raum; A,B Teilmengen von X; x,y,... Punkte von X; (x_n), (y_n) Folgen in X. Für $x \in X$ sei (x) die konstante Folge mit $x_n = x$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $\mathbb{R}$ sei der eindimensionale Euklidische Raum.

Im Gegensatz zu den mehr statischen Aspekten des letzten Paragraphen wenden wir uns nun mehr dynamischen Aspekten zu:

<u>1.3.1 DEFINITION</u>

(1) Eine Folge (x_n) *konvergiert* gegen x, in Zeichen: $(x_n) \to x$, wenn jede Umgebung von x fast alle Glieder der Folge enthält, d.h. zu jeder Umgebung U von x existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so daß aus $m \geq n$ stets $x_m \in U$ folgt. Eine Folge heißt *konvergent*, wenn es einen Punkt gibt, gegen den sie konvergiert.

(2) x heißt *Verdichtungspunkt* der Folge (x_n), wenn jede Umgebung von x unendlich viele Glieder der Folge (x_n) enthält, d.h. wenn zu jeder Umgebung U von x und zu jedem n ein $m \geq n$ mit $x_m \in U$ existiert.

<u>1.3.2 SATZ</u>

Äquivalent sind:

(a) $(x_n) \to x$ *in* $\underline{X}$

(b) $(d(x,x_n)) \to 0$ *in* $\underline{\mathbb{R}}$.

(c) $\forall\, r > 0\ \exists\, n\ \forall\, m \geq n\quad d(x,x_m) < r$.

Beweis:

Bekanntlich sind (b) und (c) äquivalent. Es genügt, die Äquivalenz von (a) und (c) nachzuweisen.

(a) $\Rightarrow$ (c): Sei $r > 0$. Dann ist die offene Kugel $S(x,r)$ trivialerweise eine Umgebung von x. Also gibt es nach (a) ein n, so daß aus $m \geq n$ stets $x_m \in S(x,r)$ folgt. Wegen $x_m \in S(x,r) \Longleftrightarrow d(x,x_m) < r$ folgt hieraus (c).

(c) $\Rightarrow$ (a): Ist U Umgebung von x, so gibt es definitionsgemäß ein $r > 0$ mit $S(x,r) \subset U$. Nach (c) existiert ein n, so daß aus $m \geq n$ stets $d(x,x_m) < r$ folgt, d.h. $x_m \in S(x,r) \subset U$ für $m \geq n$.

<u>1.3.3 SATZ</u>

Äquivalent sind:

(a) x *ist Verdichtungspunkt von* (x_n) *in* $\underline{X}$.

(b) 0 *ist Verdichtungspunkt von* $(d(x,x_n))$ *in* $\underline{\mathbb{R}}$.

(c) $\forall r > 0\ \forall\, n\ \exists\, m \geq n\quad d(x,x_m) < r$.

Beweis:

Der Beweis verläuft völlig analog zum Beweis des Satzes 1.3.2.

Die Sätze 1.3.2 und 1.3.3 zeigen, daß in der Definition 1.3.1 der Ausdruck "Umgebung von x" ersetzt werden kann durch "offene Kugel mit Zentrum x", ohne die Aussage zu ändern.

1.3.4 SATZ

Konvergiert (x_n) *gegen* x, *so ist* x *der einzige Verdichtungspunkt von* (x_n).

Beweis:

Konvergiert (x_n) gegen x, so ist x offenbar Verdichtungspunkt von (x_n). Zu $r > 0$ gibt es also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $d(x_m,x) < \frac{r}{2}$ für alle $m \geq n$, und, falls y ebenfalls ein Verdichtungspunkt ist, zu diesem n auch ein $k \geq n$ mit $d(y,x_k) < \frac{r}{2}$.

Somit gilt: $d(y,x) \leq d(y,x_k) + d(x_k,x) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$.

Wir haben also gezeigt: $d(y,x) < r \ \forall \ r > 0$. Daraus folgt aber $d(y,x) = 0$, also $x = y$.

1.3.5 FOLGERUNG

Konvergiert (x_n) *gegen* x *und gegen* y, *so ist* $x = y$.

Diese Eindeutigkeitsaussage veranlaßt uns zu der

1.3.6 DEFINITION

Konvergiert (x_n) gegen x, so heißt x der *Limes* oder *Grenzwert* von (x_n). Oft schreibt man - wie Ihnen aus der Analysis bekannt sein dürfte - statt $(x_n) \to x$ auch $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

1.3.7 BEISPIELE

(1) Von der Analysis her kennen Sie Folgen, die keinen Verdichtungspunkt haben, z.B. $(n) = (1,2,3,4,\ldots)$ in $\mathbb{R}$. Ebenso gibt es Folgen, die einen Verdichtungspunkt haben, aber nicht konvergieren, z.B. in $\mathbb{R}$ die Folge $(1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4},\ldots)$.

(2) In einem diskreten Raum (X,d_D) ist x genau dann Grenzwert von (x_n), wenn fast alle Glieder der Folge gleich x sind und genau dann Verdichtungspunkt von (x_n) , wenn unendlich viele Glieder der Folge gleich x sind.

1.3.8 SATZ

Aus $(x_n) \to x$ *und* $(y_n) \to y$ *folgt* $(d(x_n,y_n)) \to d(x,y)$.

Beweis:

Zu jedem $r > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß aus $m \geq n$ sowohl $d(x,x_m) < \frac{r}{2}$ als auch $d(y,y_m) < \frac{r}{2}$ folgt. Somit gilt für $m \geq n$:

(1) $d(x_m,y_m) \leq d(x_m,x) + d(x,y) + d(y,y_m) < d(x,y) + r$ und

(2) $d(x,y) \leq d(x,x_m) + d(x_m,y_m)$ o $d(y_m,y) < d(x_m,y_m) + r$,

also $|d(x,y) - d(x_m,y_m)| < r$ für alle $m \geq n$.

1.3.9 FOLGERUNG

Ist $a \in \mathbb{R}^+$ *und* $d(x_n,y_n) \le a$ *für alle* n, *so folgt aus* $(x_n) \to x$ *und* $(y_n) \to y$ *auch* $d(x,y) \le a$.

1.3.1o SATZ

Sei (x_{n_i}) *eine Teilfolge von* (x_n). *Dann gilt:*

(1) *Aus* $(x_n) \to x$ *folgt* $(x_{n_i}) \to x$.

(2) *Ist* x *Verdichtungspunkt von* (x_{n_i}), *so ist* x *auch Verdichtungspunkt von* (x_n).

Beweis:

(1) Jede Umgebung von x enthält fast alle Glieder von (x_n), somit erst recht fast alle Glieder von (x_{n_i}).

(2) Jede Umgebung von x enthält unendlich viele Glieder von (x_{n_i}), somit erst recht unendlich viele Glieder von (x_n).

1.3.11 SATZ

Äquivalent sind:

(a) x *ist Berührpunkt von* $A \subset X$.

(b) *Es gibt eine Folge* (a_n) *in* A, *die gegen* x *konvergiert.*

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Ist x Berührpunkt von A, so gilt $\operatorname{dist}(x,A) = 0$. Also existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $a_n \in A$ mit $d(x,a_n) < \frac{1}{n}$. Eine aus derartigen a_n gebildete Folge (a_n) konvergiert offenbar gegen x.

(b) $\Rightarrow$ (a): Ist $x = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $r > 0$, so ist $d(x,a_n) < r$ für fast alle n. Somit ist auch $\operatorname{dist}(x,A) < r$, und da r beliebig war, folgt $\operatorname{dist}(x,A) = 0$.

1.3.12 DEFINITION

Folgen (x_n) und (y_n) heißen *benachbart*, wenn die Folge $(d(x_n,y_n))$ gegen 0 konvergiert, d.h. wenn gilt: $\forall r > 0\ \exists\, n\ \forall\, m \ge n\ \ d(x_m,y_m) < r$.

1.3.13 SATZ

Für eine Folge (x_n) *sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $(x_n) \to x$.

(b) (x_n) *und* (x) *sind benachbart.*

Beweis:

Der Beweis folgt unmittelbar aus 1.3.2.

1.3.14 SATZ

Benachbartsein von Folgen ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Folgen in $\underline{X}$.

Beweis:

$(x_n), (y_n), (z_n)$ seien Folgen in $\underline{X}$.

(1) $d(x_n,x_n) = 0 \ \forall\, n \Rightarrow (x_n)$ ist zu sich selbst benachbart.

(2) Die Symmetrie folgt aus der Gleichung $d(x_n,y_n) = d(y_n,x_n)$.

(3) Wegen $0 \le d(x_n,z_n) \le d(x_n,y_n) + d(y_n,z_n)$ folgt aus dem Benachbartsein von (x_n) und (y_n) sowie (y_n) und (z_n) das Benachbartsein von (x_n) und (z_n).

1.3.15 BEMERKUNG

Das Benachbartsein von Mengen ist weder reflexiv noch transitiv. So ist $\emptyset$ nicht zu sich selbst benachbart (vgl. 1.2.1), und in $\mathbb{R}$ sind die Mengen $[0,1]$ und $[1,2]$ sowie $[1,2]$ und $[2,3]$ benachbart, aber $[0,1]$ und $[2,3]$ sind nicht benachbart.

1.3.16 SATZ

Konvergiert (x_n) *gegen* x, *so sind äquivalent:*

(a) (x_n) *und* (y_n) *sind benachbart.*

(b) $(y_n) \to x$.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): folgt unmittelbar aus der Ungleichung

$$0 \le d(x,y_n) \le d(x,x_n) + d(x_n,y_n).$$

(b) $\Rightarrow$ (a): folgt unmittelbar aus

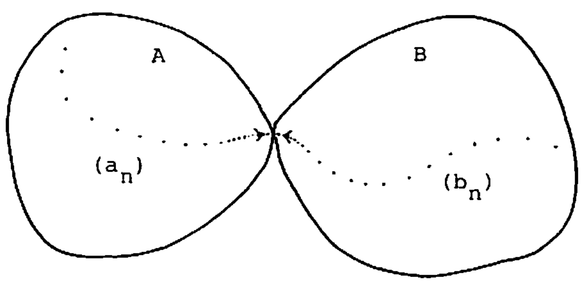
$$0 \le d(x_n,y_n) \le d(x_n,x) + d(x,y_n).$$

1.3.17 SATZ

Äquivalent sind:

(a) A *und* B *sind benachbart.*

(b) *Es gibt Folgen* (a_n) *in* A *und* (b_n) *in* B, *die benachbart sind.*



Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b):

Aus dist(A,B) = 0 folgt, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ Elemente $a_n \in A$, $b_n \in B$ existieren mit $d(a_n,b_n) < \frac{1}{n}$. Folgen (a_n) und (b_n), die man auf diese Weise gewinnt, sind benachbart.

(b) $\Rightarrow$ (a):

Sind (a_n) und (b_n) benachbart, so gibt es für jedes $r > 0$ ein n mit $d(a_n,b_n) < r$. Folglich gilt $\operatorname{dist}(A,B) \leq d(a_n,b_n) < r$ für jedes $r > 0$. Dann ist aber dist(A,B) = 0.

In obigem Satz wurde gezeigt, wie mit Hilfe benachbarter Folgen geprüft werden kann, ob zwei Mengen benachbart sind. Im nächsten Satz wird gezeigt, daß auch umgekehrt mit Hilfe benachbarter Mengen geprüft werden kann, ob zwei Folgen benachbart sind. Dieser Satz wird sich im nächsten Kapitel bei der Untersuchung der gleichmäßigen Stetigkeit von Funktionen als sehr nützlich erweisen. Die in ihm auftretende Bedingung ist allerdings etwas kompliziert, und der Beweis des Satzes ist schwieriger als der aller anderen Sätze dieses Kapitels.

1.3.18 SATZ

Äquivalent sind:

(a) (x_n) *und* (y_n) *sind benachbart.*

(b) *Für jede unendliche Teilmenge* M *von* $\mathbb{N}$ *sind die Mengen* $\{x_m | m \in M\}$ *und* $\{y_m | m \in M\}$ *benachbart.*

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Sei $r > 0$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$, so daß für $m \geq n$ stets $d(x_m,y_m) < r$ ist. Da zu n ein $k \in M$ mit $k \geq n$ existiert, gilt:
$\operatorname{dist}(\{x_m | m \in M\}, \{y_m | m \in M\}) \leq d(x_k,y_k) < r$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Wir nehmen an, daß (x_n) und (y_n) nicht benachbart sind. Dann gibt es eine positive reelle Zahl $r > 0$ und eine unendliche Teilmenge M_1 von $\mathbb{N}$, so daß aus $m \in M_1$ stets $d(x_m,y_m) \geq r$ folgt. Wir unterscheiden drei Fälle:

Fall 1:

Es gibt ein $x \in X$, so daß die Menge $M := \{m | m \in M_1, d(x,x_m) \leq \frac{r}{3}\}$ unendlich ist. Dann gilt für jedes Paar $(m,m') \in M \times M$ die Ungleichung:
$r \leq d(x_m,y_m) \leq d(x_m,x) + d(x,x_{m'}) + d(x_{m'},y_m) \leq \frac{2}{3} r + d(x_{m'},y_m)$, woraus $\frac{1}{3} r \leq d(x_{m'},y_m)$ folgt. Also gilt $\operatorname{dist}(\{x_m | m \in M\}, \{y_m | m \in M\}) \geq \frac{r}{3}$, $\{x_m | m \in M\}$ und $\{y_m | m \in M\}$ sind also nicht benachbart im Widerspruch zu (b).

Fall 2:

Es gibt ein $x \in X$, so daß die Menge $\{m | m \in M_1, d(x,y_m) \leq \frac{r}{3}\}$ unendlich ist. Wie im Fall 1 gelangt man zu einem Widerspruch zu (b).

Fall 3:

Für jedes $x \in X$ sind die Mengen $\{m \mid m \in M_1,\ d(x,y_m) \le \frac{r}{3}\}$ und $\{m \mid m \in M_1,\ d(x,y_m) \le \frac{r}{3}\}$ endlich.

Durch Induktion definieren wir eine unendliche Teilmenge $M = \{m_1, m_2, \ldots\}$ von M_1 folgendermaßen:

Induktionsanfang: Sei m_1 irgendein Element von M_1.

Induktionsvoraussetzung: $m_1, \ldots, m_k$ seien bereits definiert. Dann ist für jedes $i \in \mathbb{N}_k$ die Menge $\{m \mid m \in M_1,\ d(x_{m_i}, y_m) \le \frac{r}{3}\}$ und die Menge $\{m \mid m \in M_1,\ d(y_{m_i}, x_m) \le \frac{r}{3}\}$ endlich. Da M_1 unendlich ist, können wir ein Element m_{k+1} in M_1 finden, das in keiner dieser Mengen liegt. Auf diese Weise erhalten wir eine unendliche Teilmenge $M = \{m_1, m_2, \ldots\}$ von M_1. Sei $(m_i, m_j) \in M \times M$. Gilt $i = j$, so ist gemäß der Definition von $M_1 \supset M$ $d(x_{m_i}, y_{m_j}) \ge r$. Gilt $i < j$, so liegt nach Konstruktion m_j nicht in der Menge $\{m \mid m \in M_1,\ d(x_{m_i}, y_m) \le \frac{r}{3}\}$. Daraus folgt $d(x_{m_i}, y_{m_j}) > \frac{r}{3}$. Gilt $j < i$, so liegt nach Konstruktion m_i nicht in der Menge $\{m \mid m \in M_1,\ d(y_{m_j}, x_m) \le \frac{r}{3}\}$, woraus $d(y_{m_j}, x_{m_i}) > \frac{r}{3}$ folgt. Also gilt $\operatorname{dist}(\{x_m \mid m \in M\}, \{y_m \mid m \in M\}) \ge \frac{r}{3}$. Folglich sind auch in diesem Fall die Mengen $\{x_m \mid m \in M\}$ und $\{y_m \mid m \in M\}$ nicht benachbart im Widerspruch zu (b).

1.3.19 BEMERKUNG

Sind für Folgen (x_n) und (y_n) die Mengen $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ benachbart, so sind (x_n) und (y_n) nicht notwendig benachbart. So sind in $\mathbb{R}$ die Folgen $(\frac{1}{n})$ und (n) nicht benachbart, aber $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $\{n \mid n \in \mathbb{N}\}$ haben wir ein gemeinsames Element, nämlich 1, und sind somit benachbart.

1.3.2o AUFGABEN

Zeigen Sie:

(1) x ist genau dann Berührpunkt der Menge A, wenn es eine Folge (a_n) in A gibt, die x als Verdichtungspunkt besitzt.

(2) x ist genau dann Grenzwert der Folge (x_n), wenn jede Teilfolge (x_{n_i}) von (x_n) den Punkt x als Verdichtungspunkt besitzt.

(3) x ist genau dann Verdichtungspunkt der Folge (x_n), wenn eine gegen x konvergierende Teilfolge (x_{n_i}) von (x_n) existiert.

(4) x ist genau dann Grenzwert der Folge (x_n), wenn die Mischfolge $x, x_1, x, x_2, x, x_3, \ldots$ konvergiert.

(5) die Menge aller Verdichtungspunkte einer Folge ist abgeschlossen.

1.3.21 AUFGABEN

Prüfen Sie die Richtigkeit folgender Behauptungen:

(1) Eine Folge (x_n) konvergiert genau dann gegen x, wenn jede Teilfolge von (x_n) eine Teilfolge besitzt, die gegen x konvergiert.

(2) Eine Folge (x_n) konvergiert genau dann, wenn jede Teilfolge von (x_n) eine konvergierende Teilfolge besitzt.

1.3.22 AUFGABEN

Eine Folge (x_n) heißt fast konstant, falls ein n_o so existiert, daß für alle $n \geq n_o$, $m \geq n_o$ gilt: $x_n = x_m$. Zeigen Sie:

(1) in jedem metrischen Raum konvergiert jede fast konstante Folge

(2) jede konvergente Folge eines endlichen metrischen Raumes ist fast konstant

(3) jede konvergente Folge eines diskreten metrischen Raumes ist fast konstant

(4) folgende Bedingungen sind äquivalent:

  (i) alle konvergenten Folgen in X sind fast konstant

  (ii) alle Teilmengen von X sind abgeschlossen

  (iii) alle Teilmengen von X sind offen

  (iv) alle einelementigen Teilmengen von X sind offen.

(5) Für jedes n sei $x^n = (x^n_m)$ ein Element von Bair(X). Die Folge (x^n) konvergiert in Bair(X) genau dann, wenn für jedes feste m die Folge (x^n_m) fast konstant ist.

1.3.23 AUFGABE

Konstruieren Sie eine Metrik d auf $\mathbb{Q}$ so, daß die Folge $(\frac{1}{n})$ in $(\mathbb{Q},d)$ gegen 1 konvergiert.