GLOSSAR ZU § 1

Definition

Axiome für eine *Metrik* $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$:

(M1) $d(x,y) = 0 \iff x = y$ für $x \in X,\ y \in X$

(M2) $d(x,y) = d(y,x)$ für $x \in X,\ y \in X$

(M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ für $x \in X,\ y \in X,\ z \in X$

$\underline{X} := (X,d)$ *metrischer Raum* (1.1.1)

Spezielle Metriken

(1) X beliebige Menge

Diskrete Metrik

$$d_D(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases} \qquad (1.1.2)$$

(2) $X = \mathbb{R}^n$; $x = (x_1,\dots,x_n)$, $y = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$

(a) *Euklidische Metrik*

$$d_E(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2\right)^{1/2} \qquad (1.1.2)$$

(b) *Maximum-Metrik*

$$d_M(x,y) = \max\{|x_i - y_i| \mid i = 1,\dots,n\} \qquad (1.1.3)$$

(c) *Summen-Metrik*

$$d_S(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \qquad (1.1.3)$$

(3) $X \neq \emptyset$ beliebige Menge

$B(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt}\}$

$f,g \in B(X)$

Supremum-Metrik auf $B(X)$

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \qquad (1.1.4)$$

$\underline{X} = (X,d)$ metrischer Raum; $A, A', B, B', U \subset X$, $x,y \in X$, (x_n), (y_n) Folgen in X, $0 < r \in \mathbb{R}$.

Offene Kugel mit Zentrum $x \in X$ *und Radius* $r > 0$:

$$S(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\} \qquad (1.1.10)$$

Teilraum $\underline{A} = (A, d \mid A \times A)$ (1.1.9)

Abstand von Mengen

$$\mathrm{dist}(A,B) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } A = \emptyset \text{ oder } B = \emptyset \\ \inf\{d(a,b) \mid a \in A, b \in B\}, & \text{falls } A \neq \emptyset \neq B. \end{cases}$$

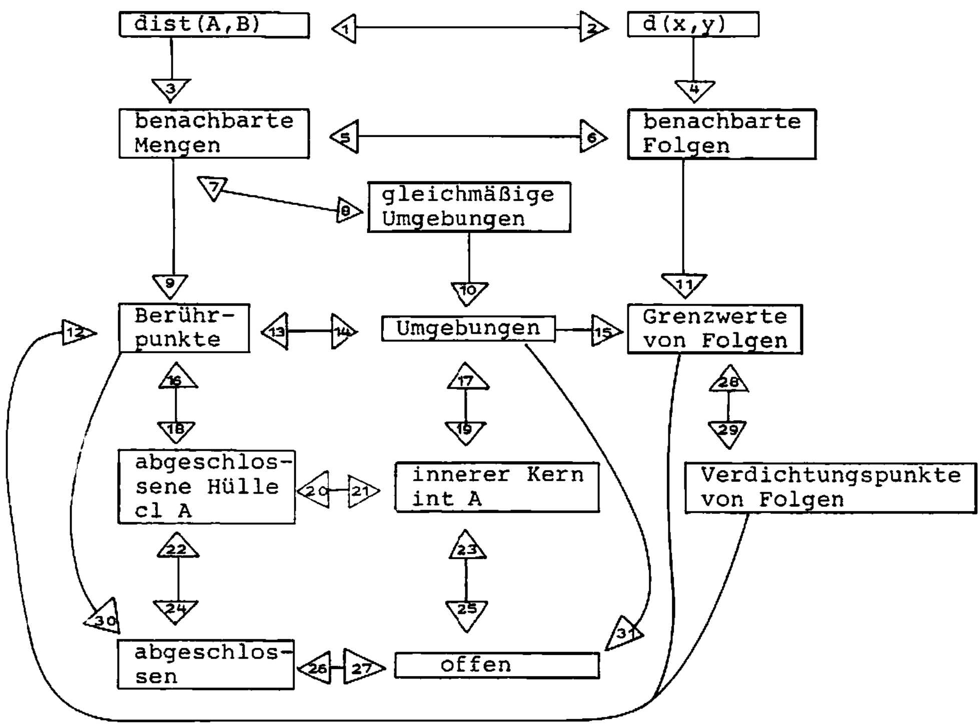
$$\mathrm{dist}(x,B) = \mathrm{dist}(\{x\},B) \quad (1.2.1)$$

x *Berührpunkt von* A $\iff \mathrm{dist}(x,A) = 0$ (1.2.3) $\iff \forall r>0 : S(x,r) \cap A \neq \emptyset$ (1.2.4) $\iff$ x nicht innerer Punkt von $X \setminus A$	x *innerer Punkt von* B $\iff \mathrm{dist}(x,X\setminus B) > 0$ $\iff \exists r>0 : S(x,r) \subset B$ (1.2.15) $\iff$ x nicht Berührpunkt von $X\setminus B$ (1.2.16)
abgeschlossene Hülle (Abschluß) von A $\mathrm{cl}\,A = \{x \in X \mid x$ Berührpunkt von $A\}$ (1.2.9)	*offener Kern (Inneres) von* B $\mathrm{int}\,B = \{x \in X \mid x$ innerer Punkt von $B\}$ (1.2.17)
$\left.\begin{array}{l}\mathrm{cl}\,X = X\\ \mathrm{cl}\,\emptyset = \emptyset\end{array}\right\}$ (1.2.14(1)) $\left.\begin{array}{l}A \subset \mathrm{cl}\,A\\ A \subset A' \Rightarrow \mathrm{cl}\,A \subset \mathrm{cl}\,A'\\ \mathrm{cl}(A \cup A') = \mathrm{cl}\,A \cup \mathrm{cl}\,A'\\ \mathrm{cl}(\mathrm{cl}\,A) = \mathrm{cl}\,A\end{array}\right\}$ (1.2.11)	$\left.\begin{array}{l}\mathrm{int}\,X = X\\ \mathrm{int}\,\emptyset = \emptyset\end{array}\right\}$ (1.2.23(1)) $\left.\begin{array}{l}\mathrm{int}\,B \subset B\\ B \subset B' \Rightarrow \mathrm{int}\,B \subset \mathrm{int}\,B'\\ \mathrm{int}(B \cap B') = \mathrm{int}\,B \cap \mathrm{int}\,B'\\ \mathrm{int}(\mathrm{int}\,B) = \mathrm{int}\,B\end{array}\right\}$ (1.2.19)
$\mathrm{cl}\,A = X\setminus\mathrm{int}(X\setminus A)$ (1.2.32(1))	$\mathrm{int}\,B = X\setminus\mathrm{cl}(X\setminus B)$ (1.2.18)
A *abgeschlossen* $\iff A = \mathrm{cl}\,A$ (1.2.12) $\iff \forall r>0 : (S(x,r) \cap A) \neq \emptyset \Rightarrow x \in A$ (1.2.4)	B *offen* $\iff B = \mathrm{int}\,B$ $\iff \forall x \in B\ \exists r>0 : S(x,r) \subset B$ (1.2.20)
Abgeschlossenheit bleibt erhalten bei Bildung - beliebiger Durchschnitte - endlicher Vereinigungen (1.2.14(2),(3))	Offenheit bleibt erhalten bei Bildung - endlicher Durchschnitte - beliebiger Vereinigungen (1.2.23(2),(3))
cl A kleinste abgeschlossene Menge, die A umfaßt (1.2.13)	int B größte offene Menge, die in B liegt (1.2.24)

A abgeschlossen $\Longleftrightarrow$ X\A offen (1.2.22)	B offen $\Longleftrightarrow$ X\B abgeschlossen (1.2.22)
A , B *benachbart*	$\Longleftrightarrow$ dist(A,B) = O
U *Umgebung von* x	$\Longleftrightarrow$ x innerer Punkt von U (1.2.25(1)) $\Longleftrightarrow$ x kein Berührpunkt von X\U (1.2.28(1)) $\Longleftrightarrow$ dist(x, X\U) > O
U *Umgebung von* A	$\Longleftrightarrow$ U Umgebung von a für alle a $\in$ A (1.2.25(2)) $\Longleftrightarrow$ $\forall a \in A$: dist(a, X\U) > O
U *gleichmäßige Umgebung von* A	$\Longleftrightarrow$ $\exists r > 0$: $S(a,r) \subset U$ für alle a $\in$ A (1.2.25(3)) $\Longleftrightarrow$ $\exists r > 0$: $d(a, X\backslash U) \geq r$ für alle a $\in$ A $\Longleftrightarrow$ dist(A,X\U) > O $\Longleftrightarrow$ A und X\U nicht benachbart (1.2.28(2))
(x_n) *konvergiert gegen* x $(x_n) \to x$	$\Longleftrightarrow$ jede Umgebung von x enthält fast alle x_n (1.3.1(1)) $\Longleftrightarrow$ $(d(x,x_n)) \to 0$ (1.3.2)
x *Grenzwert von* (x_n)	$\Longleftrightarrow$ $(x_n) \to x$ (1.3.6)
x *Verdichtungspunkt von* (x_n)	$\Longleftrightarrow$ jede Umgebung von x enthält unendlich viele x_n (1.3.1(2)) $\Longleftrightarrow$ O Verdichtungspunkt von $(d(x,x_n))$ (1.3.3) $\Longleftrightarrow$ $\exists$ Teilfolge (x_{n_i}) von (x_n) mit $(x_{n_i}) \to x$ (1.3.2o(3))
$(x_n) \to x$	$\Rightarrow$ x Verdichtungspunkt von (x_n) (1.3.4)

x Berührpunkt von A	$\Leftrightarrow \exists x_n$ in A : $(x_n) \to x$ (1.3.11) $\Leftrightarrow \exists x_n$ in A : x Verdichtungspunkt von (x_n) (1.3.2o(1))
(x_n), (y_n) *benachbart*	$\Leftrightarrow (d(x_n,y_n)) \to 0$ (1.3.12)
A, B benachbart	$\Leftrightarrow \exists x_n \in A,\ y_n \in B$: (x_n), (y_n) benachbart (1.3.17)
(x_n), (y_n) benachbart	$\Leftrightarrow$ für alle unendlichen $M \subset \mathbb{N}$ sind $\{x_m \mid m \in M\}$ und $\{y_m \mid m \in M\}$ benachbart (1.3.18)

Die in diesem Paragraphen für einen metrischen Raum eingeführten Begriffe und ihre Beziehungen zueinander werden durch das im folgenden dargestellte Schema festgehalten. (Dabei bedeutet " $\boxed{A} \xrightarrow{n} \boxed{B}$ " , daß man aus der Definition A mittels der im Anschluß aufgeführten Aussage (n) die Definition B folgert.)



(1) $\mathrm{dist}(A,B) = \inf\{d(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ $(A \neq \emptyset \neq B)$ (1.2.1)

(2) $d(x,y) = \mathrm{dist}(\{x\},\{y\})$

(3) A und B sind benachbart $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{dist}(A,B) = 0$ (1.2.3)

(4) (x_n) und (y_n) sind benachbart
$\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \quad \forall m \geq n \; d(x_m,y_m) < \varepsilon$ (1.3.12)

(5) A und B sind benachbart
$\Longleftrightarrow$ es gibt Folgen (a_n) in A und (b_n) in B, die benachbart sind (1.3.17)

(6) (x_n) und (y_n) sind benachbart
$\Longleftrightarrow$ für jede unendliche Teilmenge M von $\mathbb{N}$ sind die Mengen $\{x_m \mid m \in M\}$ und $\{y_m \mid m \in M\}$ benachbart (1.3.18)

(7) A und B sind benachbart
$\Longleftrightarrow$ $(X \setminus B)$ ist keine gleichmäßige Umgebung von A (1.2.32(1))

(8) B ist gleichmäßige Umgebung von A
$\Longleftrightarrow$ A und $X \setminus B$ sind nicht benachbart (1.2.28(2))

(9) x ist Berührpunkt von A
$\Longleftrightarrow$ $\{x\}$ und A sind benachbart (1.2.3)

(1o) A ist Umgebung von x
$\Longleftrightarrow$ A ist gleichmäßige Umgebung von $\{x\}$ (1.2.26(3))

(11) $(x_n) \to x \Longleftrightarrow (x_n)$ und (x) sind benachbart (1.3.13)

(12) x ist Berührpunkt von A
$\Longleftrightarrow$ es gibt eine Folge (a_n) in A, die x als Grenzwert (Verdichtungspunkt) hat (1.3.11 und 1.3.2o(1))

(13) x ist Berührpunkt von A
$\Longleftrightarrow$ $(X \setminus A)$ ist keine Umgebung von x (1.2.28(1))

(14) A ist Umgebung von x $\Longleftrightarrow$ x ist nicht Berührpunkt von $X \setminus A$ (1.2.28(1))

(15) $(x_n) \to x \Longleftrightarrow$ jede Umgebung von x enthält fast alle Glieder von (x_n) (1.3.1)

(16) x ist Berührpunkt von A $\Longleftrightarrow$ $x \in \mathrm{cl}\, A$ (1.2.9)

(17) A ist Umgebung von x $\Longleftrightarrow$ $x \in \mathrm{int}\, A$ (1.2.25(1))

(18) siehe (16)

(19) siehe (17)

(2o) $\mathrm{cl}\, A = X \setminus \mathrm{int}(X \setminus A)$ (1.2.32(1))

(21) int $A = X \setminus \mathrm{cl}(X \setminus A)$ (1.2.18)

(22) cl $A = \bigcap\{B \subset X \mid A \subset B$, B abgeschlossen$\}$ (1.2.13)

(23) int $A = \bigcup\{B \subset X \mid B \subset A$, B offen$\}$ (1.2.24)

(24) A abgeschlossen $\Leftrightarrow$ A = cl A (1.2.12)

(25) A offen $\Leftrightarrow$ A = int A (1.2.2o)

(26) A abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $(X \setminus A)$ offen (1.2.22)

(27) A offen $\Leftrightarrow$ $(X \setminus A)$ abgeschlossen (1.2.22)

(28) $(x_n) \to x \Leftrightarrow x$ ist Verdichtungspunkt jeder Teilfolge von (x_n) (1.3.2o(2))

(29) x ist Verdichtungspunkt von (x_n)
$\Leftrightarrow$ es gibt eine Teilfolge von (x_n), die x als Grenzwert hat (1.3.2o(3))

(3o) A abgeschlossen $\Leftrightarrow$ A enthält alle Berührpunkte von A (1.2.12)

(31) A offen $\Leftrightarrow$ A ist Umgebung jedes ihrer Punkte (1.2.2o und 1.2.25(1))

GLOSSAR ZU § 2

f: $\underline{X} \to \underline{X'}$ sei eine Abbildung zwischen metrischen Räumen $\underline{X} = (X,d)$ und $\underline{X'} = (X',d')$.

f ist <u>stetig in x</u> $\in X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in X$
$(d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x),f(y)) < \varepsilon)$

$\Leftrightarrow$ für jede Umgebung U von f(x) in $\underline{X'}$ ist $f^{-1}[U]$ Umgebung von x in $\underline{X}$

$\Leftrightarrow$ für jede Folge (x_n), die in $\underline{X}$ gegen x konvergiert, konvergiert die Folge $(f(x_n))$ in $\underline{X'}$ gegen f(x)

$\Leftrightarrow$ für jede Teilmenge A von $\underline{X}$, die x als Berührpunkt hat, ist f(x) Berührpunkt von f[A] in $\underline{X'}$ (2.1.1/2.1.2)

f ist <u>stetig</u> $\Leftrightarrow$ f ist stetig in jedem $x \in X$

$\Leftrightarrow$ für jede offene Teilmenge A von $\underline{X'}$ ist $f^{-1}[A]$ offen in $\underline{X}$

$\Longleftrightarrow$ für jede abgeschlossene Teilmenge A von $\underline{X}'$ ist $f^{-1}[A]$ abgeschlossen in $\underline{X}$ (2.1.3/2.1.4)

f ist <u>gleichmäßig stetig</u> $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X\ \forall y \in X$
$(d(x,y)<\delta \Rightarrow d'(f(x),f(y)) < \varepsilon)$

$\Longleftrightarrow$ für jede gleichmäßige Umgebung U einer Menge A in $\underline{X}'$ ist $f^{-1}[U]$ eine gleichmäßige Umgebung von $f^{-1}[A]$ in $\underline{X}$

$\Longleftrightarrow$ für je zwei benachbarte Mengen A und B in $\underline{X}$ sind f[A] und f[B] benachbart in $\underline{X}'$

$\Longleftrightarrow$ für je zwei benachbarte Folgen (x_n) und (y_n) in $\underline{X}$ sind $(f(x_n))$ und $(f(y_n))$ benachbart in $\underline{X}'$ (2.1.5/2.1.6)

<u>Spezielle (gleichmäßig) stetige Abbildungen</u>:

inv:	$\underline{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \to \underline{\mathbb{R}}$ $x \mapsto x^{-1}$	stetig, nicht gleichmäßig stetig	(2.1.9/2.1.10)
add:	$\underline{\mathbb{R}}^2 \to \underline{\mathbb{R}}$ $(x,y) \mapsto x+y$	gleichmäßig stetig	(2.1.9/2.1.10)
mult:	$\underline{\mathbb{R}}^2 \to \underline{\mathbb{R}}$ $(x,y) \mapsto x\cdot y$	stetig, nicht gleichmäßig stetig	(2.1.9/2.1.10)
p_i:	$\underline{\mathbb{R}}^n \to \underline{\mathbb{R}}$ $(x_1,\dots,x_n) \mapsto x_i$	gleichmäßig stetig	(2.1.11/2.1.12)
dist(-,A):	$\underline{X} \to \underline{\mathbb{R}}$ $x \mapsto \mathrm{dist}(x,A)$	gleichmäßig stetig (für $A \neq \emptyset$)	(2.3.2)

u_{AB}: $\underline{X} \to \underline{\mathbb{R}}$
$x \mapsto \mathrm{dist}(x,A)\cdot(\mathrm{dist}(x,A)+\mathrm{dist}(x,B))^{-1}$

u_{AB} stetig für $\mathrm{cl}\,A \cap \mathrm{cl}\,B = \emptyset$
u_{AB} gleichmäßig stetig, genau dann wenn A und B nicht benachbart sind (2.3.3)

<u>Satz</u>: Sind $f: \underline{X} \to \underline{X}'$ und $g: \underline{X}' \to \underline{X}''$ (gleichmäßig) stetig, so ist auch $g\circ f: \underline{X} \to \underline{X}''$ (gleichmäßig) stetig. (2.1.7)

Fortsetzbarkeitssätze: Die folgende Tabelle zeigt, für welche der untersuchten metrischen Räume $\underline{Y}$ es stets möglich ist, jede (gleichmäßig) stetige Abbildung von einem abgeschlossenen Teilraum eines metrischen Raumes $\underline{X}$ nach $\underline{Y}$ (gleichmäßig) stetig auf $\underline{X}$ fortzusetzen:

	$\underline{Y}$ =		
	$[0,1]$	$]0,1[$	$\mathbb{R}$
stetige Fortsetzbarkeit	+ (2.3.5)	+ (2.3.6)	+ (2.3.7)
gleichmäßig stetige Fortsetzbarkeit	+ (2.3.5)	+ (2.3.6)	- (2.3.1(4))

Isomorphien und Äquivalenzen:

Eine bijektive Abbildung $f: \underline{X} \to \underline{X}'$ zwischen metrischen Räumen heißt

$\left[\begin{array}{l}\text{metrischer}\\ \text{uniformer}\\ \text{topologischer}\end{array}\right]$ Isomorphismus, falls sowohl die Abbildung

$f: \underline{X} \to \underline{X}'$ als auch die Abbildung $f^{-1}: \underline{X}' \to \underline{X}$

$\left[\begin{array}{l}\text{abstandserhaltend}\\ \text{gleichmäßig stetig}\\ \text{stetig}\end{array}\right]$ ist. (2.2.1)

Metriken d und d' auf X heißen $\left[\begin{array}{l}\text{uniform}\\ \text{topologisch}\end{array}\right]$

äquivalent, wenn die Identität $id_X: (X,d) \to (X,d')$ ein

$\left[\begin{array}{l}\text{uniformer}\\ \text{topologischer}\end{array}\right]$ Isomorphismus ist. (2.2.1)

d uniform äquivalent zu d' $\Longleftrightarrow$ (A benachbart zu B bzgl. d $\Longleftrightarrow$ A benachbart zu B bzgl. d')

$\Longleftrightarrow$ ((x_n) benachbart zu (y_n) bzgl. d $\Longleftrightarrow$ (x_n) benachbart zu (y_n) bzgl. d')

$\Longleftrightarrow$ (A gleichmäßige Umgebung von B bzgl. d $\Longleftrightarrow$ A gleichmäßige Umgebung von B bzgl. d') (2.2.5) d topologisch äquivalent zu d' $\Longleftrightarrow$ (A abgeschlossen bzgl. d $\Longleftrightarrow$ A abgeschlossen bzgl. d')

$\Longleftrightarrow$ (A offen bzgl. d $\Longleftrightarrow$ A offen bzgl. d')

$\Longleftrightarrow$ (x Berührpunkt von A bzgl. d $\Longleftrightarrow$ x Berührpunkt von A bzgl. d')

$\Longleftrightarrow$ (A Umgebung von x bzgl. d $\Longleftrightarrow$ A Umgebung von x bzgl. d')

$\Longleftrightarrow$ (x Grenzwert von (x_n) bzgl. d $\Longleftrightarrow$ x Grenzwert von (x_n) bzgl. d') (2.2.6)

GLOSSAR ZU § 3

$\underline{X}$ = (X,d) metrischer Raum, $A \subset X$, (x_n) Folge in X

Teilmengen von $\underline{X}$:

A G_δ - *Menge in* X $\Longleftrightarrow$ A ist Durchschnitt einer Folge offener Teilmengen von $\underline{X}$ (3.2.7)

A *dicht* in $\underline{X}$ $\Longleftrightarrow$ cl A = X (3.2.1)

A *nirgends dicht* in $\underline{X}$ $\Longleftrightarrow$ int cl A = $\emptyset$ (3.4.1)

A *mager* in $\underline{X}$ $\Longleftrightarrow$ A von 1. Kategorie in $\underline{X}$

$\Longleftrightarrow$ A ist Vereinigung einer Folge nirgends dichter Teilmengen von $\underline{X}$ (3.4.1)

A *fett* in $\underline{X}$ $\Longleftrightarrow$ A von 2. Kategorie in $\underline{X}$

$\Longleftrightarrow$ A nicht mager in $\underline{X}$ (3.4.1)

$$\operatorname{diam} A = \begin{cases} 0 & \text{, falls } A = \emptyset \\ \sup\{d(a,b) \mid a \in A \text{ und } b \in A\} & \text{, falls } A \neq \emptyset \end{cases}$$

Beispiele:

	[0,1]	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{P}$	$\mathbb{N}$
G_δ-Menge in $\mathbb{R}$	+	– (3.5.8)	+	+
dicht in $\mathbb{R}$	-	+	+	-

	$[0,1]$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{P}$	$\mathbb{N}$
nirgends dicht in $\mathbb{R}$	-	-	-	+
mager in $\mathbb{R}$	-	+	-	+
fett in $\mathbb{R}$	+	-	+	-

Folgen in $\underline{X}$:

(x_n) *Cauchy-Folge* in $\underline{X}$ $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \quad \forall m \geq n \; d(x_n, x_m) < \varepsilon$

$\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} (\operatorname{diam}\{x_m \mid m \geq n\}) = 0$ 3.1.1

3.1.3

$\Longleftrightarrow$ je zwei Teilfolgen von (x_n) sind benachbart 3.1.14

$(x_n) \to x \Longleftrightarrow (x_n)$ Cauchy-Folge und x Verdichtungspunkt von (x_n) (3.1.8)

Vollständigkeit:

$\underline{X}$ *vollständig* $\Longleftrightarrow$ jede Cauchy-Folge in $\underline{X}$ konvergiert

$\Longleftrightarrow$ für jede monoton fallende Folge $A_1, A_2, \ldots$ nicht-leerer Teilmengen von X mit $\lim\limits_{n\to\infty} (\operatorname{diam} A_n) = 0$ gilt $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{cl} A_n \neq \emptyset$ (3.1.9/3.1.13)

$\underline{X}$ *topologisch vollständig* $\Longleftrightarrow$ $\underline{X}$ ist zu einem vollständigen metrischen Raum topologisch isomorph (3.5.1)

Vollständigkeit von Teilräumen:

Ein Teilraum $\underline{A}$ eines $\begin{bmatrix}\text{vollständigen}\\ \text{topologisch vollständigen}\end{bmatrix}$ metrischen Raumes $\underline{X}$ ist genau dann $\begin{bmatrix}\text{vollständig}\\ \text{topologisch vollständig}\end{bmatrix}$, wenn A eine $\begin{bmatrix}\text{abgeschlossene}\\ G_\delta\text{ -}\end{bmatrix}$ Menge in $\underline{X}$ ist. (3.1.1o/3.5.6)

Fortsetzbarkeit von Abbildungen in vollständige Räume:

Zu jeder gleichmäßig stetigen Abbildung f: $\underline{A} \to \underline{Y}$ eines dichten Teilraumes $\underline{A}$ eines Raumes $\underline{X}$ in einen vollständigen Raum $\underline{Y}$ existiert eine eindeutig bestimmte gleichmäßig stetige Fortsetzung g: $\underline{X} \to \underline{Y}$ von f. (3.2.3)

Zu jeder stetigen Abbildung f: $\underline{A} \to \underline{Y}$ eines Teilraumes $\underline{A}$ eines Raumes $\underline{X}$ in einen topologisch vollständigen Raum $\underline{Y}$ existiert eine A umfassende G_δ-Menge B in $\underline{X}$ und eine stetige Fortsetzung g: $\underline{B} \to \underline{Y}$ von f. (3.2.13/3.5.1o(1))

Beispiele vollständiger Räume:

	$\mathbb{R}$	[0,1]	]0,1[	$\mathbb{P}$	$\mathbb{Q}$	
vollständig	+	+	-	-	-	[3.1.11
topologisch vollständig	+	+	+	+	-	3.5.4 3.5.7]

x *Fixpunkt* von f: X → X $\Longleftrightarrow$ f(x) = x (3.3.1)

f: $\underline{X} \to \underline{X}$ *kontrahierend* $\Longleftrightarrow \exists q < 1\ \forall x \in X\ \forall y \in X$
$d(f(x), f(y)) \leq q \cdot d(x,y)$ (3.3.3)

Banachscher Fixpunktsatz: Jede kontrahierende Abbildung f: $\underline{X} \to \underline{X}$ eines nicht-leeren, vollständigen metrischen Raumes in sich hat genau einen Fixpunkt. Für jedes x ∈ X konvergiert die Folge $(f^n(x))$ gegen diesen Fixpunkt. (3.3.4)

$\underline{X}$ *von 2. Kategorie* $\Longleftrightarrow$ X von 2. Kategorie in $\underline{X}$ (3.4.1)

Bairescher Kategoriensatz: Jeder nicht-leere, topologisch vollständige metrische Raum ist von 2. Kategorie. (3.4.3/3.5.2)

DEFINITION

Ein metrischer Raum $\underline{Y}$ heißt Vervollständigung des metrischen Raumes $\underline{X}$, wenn gilt:
(1) $\underline{Y}$ ist ein vollständiger metrischer Raum.
(2) $\underline{X}$ ist ein dichter Teilraum von $\underline{Y}$. (3.6.1)

VERVOLLSTÄNDIGUNGSSATZ

Jeder metrische Raum $\underline{X}$ hat eine bis auf metrische Isomorphie eindeutig bestimmte Vervollständigung Compl $\underline{X}$. (3.6.5/3.6.2)

GLOSSAR ZU § 4

TOTALE BESCHRÄNKTHEIT

Totale Beschränktheit ist eine uniforme, aber keine topologische Eigenschaft. (4.1.6)

Definition und Charakterisierung:

Äquivalent sind:

(1) $\underline{X}$ ist total beschränkt.

(2) $X = \emptyset$, oder für jedes $r > 0$ existiert ein r-Netz in $\underline{X}$, d.h. eine endliche Teilmenge A von X mit dist $(x,A) \leq r$ für jedes $x \in X$. (4.1.1)

(3) Jede Folge in $\underline{X}$ besitzt eine Cauchy-Teilfolge. (4.1.4)

(4) Jede Folge in $\underline{X}$ besitzt einen Verdichtungspunkt in Compl $\underline{X}$. (4.1.4)

(5) Compl $\underline{X}$ ist total beschränkt. (4.1.11)

(6) Compl $\underline{X}$ ist kompakt. (4.2.5)

(7) $\underline{X}$ ist Teilraum eines kompakten Raumes. (4.2.5)

(8) $\underline{X}$ ist uniform isomorph zu einem Teilraum eines kompakten Raumes. (4.2.5)

Verhalten gegen Konstruktionen:

Teilräume und gleichmäßig stetige Bilder total beschränkter Räume sind total beschränkt. (4.1.5/4.1.1o)

Eigenschaften:

$\underline{X}$ total beschränkt ⇒

(1) $\underline{X}$ separabel, d.h. $\underline{X}$ hat eine höchstens abzählbare, dichte Teilmenge (4.1.14)

(2) $\underline{X}$ beschränkt (4.1.7)

(3) Card $X \leq c$ (4.1.18)

KOMPAKTHEIT

Kompaktheit ist eine topologische Eigenschaft. (4.2.1)

Definition und Charakterisierung:

Äquivalent sind:

(1) $\underline{X}$ ist kompakt.

(2) Jede Folge in $\underline{X}$ besitzt einen Verdichtungspunkt. (4.2.1)

(3) $\underline{X}$ ist vollständig und total beschränkt. (4.2.2)

(4) Jede stetige Abbildung f: $\underline{X} \to \underline{\mathbb{R}}$ ist beschränkt. (4.3.2)

(5) Für jede stetige Abbildung f: $\underline{X} \to \underline{\mathbb{R}}$ hat die Menge f[X] ein größtes und ein kleinstes Element, oder sie ist leer. (4.3.2)

(6) Für jede stetige Abbildung f: $\underline{X} \to \underline{Y}$ ist die Menge f[X] in $\underline{Y}$ abgeschlossen. (4.3.6)

(7) Jede unendliche Teilmenge von $\underline{X}$ hat einen Häufungspunkt. (4.3.2)

(8) $\underline{X}$ besitzt keinen zu $\underline{\mathbb{N}}$ topologisch isomorphen abgeschlossenen Teilraum. (4.3.6)

(9) Jede monton fallende Folge $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$ nicht-leerer, abgeschlossener Teilmengen von $\underline{X}$ hat einen nicht-leeren Durchschnitt. (4.3.2)

(1o) Jede abzählbare offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von $\underline{X}$ enthält eine endliche Überdeckung $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ von $\underline{X}$. (4.3.4)

(11) Jede offene Überdeckung $\mathcal{U}$ von $\underline{X}$ enthält eine endliche Überdeckung $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ von X. (4.3.4)

(12) Für jede Menge $\mathcal{A}$ von abgeschlossenen Teilmengen von $\underline{X}$ folgt aus $\cap\mathcal{A} = \emptyset$ die Existenz einer endlichen Menge $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ mit $\cap\mathcal{B} = \emptyset$. (4.3.6)

(13) Jeder topologische Isomorphismus f: $\underline{X} \to \underline{Y}$ ist ein uniformer Isomorphismus. (4.2.21)

(14) Jeder zu $\underline{X}$ topologisch isomorphe Raum ist vollständig. (4.2.21)

(15) Jeder zu $\underline{X}$ topologisch isomorphe Raum ist totalbeschränkt. (4.2.21)

(16) Jeder zu $\underline{X}$ topologisch isomorphe Raum ist beschränkt. (4.2.21)

<u>Verhalten gegen Konstruktionen</u>:

(1) Jedes stetige Bild eines kompakten Raumes ist kompakt. (4.2.18)

(2) Ein Teilraum $\underline{A}$ eines kompakten Raumes $\underline{X}$ ist genau dann kompakt, wenn A abgeschlossen in $\underline{X}$ ist. (4.2.4)

<u>Eigenschaften</u>:

$\underline{X}$ kompakt ⇒

(1) $\underline{X}$ total beschränkt. (4.2.2)

(2) $\underline{X}$ vollständig. (4.2.2)

(3) Jedes stetige f: $\underline{X} \to \underline{Y}$ ist gleichmäßig stetig. (4.2.15)

$\underline{X}$ kompakt $\Rightarrow$

(4) Jeder topologische Isomorphismus $f: \underline{X} \to \underline{Y}$ ist ein uniformer Isomorphismus. (4.2.17)

(5) Die uniforme Struktur von $\underline{X}$ ist bereits durch die topologische Struktur von $\underline{X}$ bestimmt. Insbesondere gilt für $A, B \subset X$:
A, B benachbart $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{cl}\, A \cap \mathrm{cl}\, B \neq \emptyset$; (4.2.12)
B gleichmäßige Umgebung von A
$\Longleftrightarrow$ B Umgebung von $\mathrm{cl}\, A$. (4.2.13)

(6) $\mathrm{Card}\, X \leq \mathfrak{c}$. (4.3.5)

GLOSSAR ZU § 5

Zerlegungsmengen:

A uniforme Zerlegungsmenge von $\underline{X}$ $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{dist}(A, X\setminus A) > 0$. (5.1.9)
A Zerlegungsmenge von $\underline{X}$ $\Longleftrightarrow$ A offen und abgeschlossen in $\underline{X}$. (5.1.11)

Zusammenhang:

Zusammenhang ist eine topologische Eigenschaft, uniformer Zusammenhang eine uniforme. (5.1.4)

In folgendem Schema sind die Aussagen in jeder Spalte äquivalent:

$\underline{X}$ zusammenhängend	$\underline{X}$ uniform zusammenhängend	
Jede stetige Abbildung von $\underline{X}$ in einen zweielementigen Raum ist konstant	jede gleichmäßig stetige Abbildung von $\underline{X}$ in einen zweielementigen Raum ist konstant	(5.1.1)
für jede stetige Abbildung $f: \underline{X} \to \underline{\mathbb{R}}$ ist $f[X]$ ein Intervall	für jede gleichmäßig stetige Abbildung $f: \underline{X} \to \underline{\mathbb{R}}$ ist $\mathrm{cl}\, f[X]$ ein Intervall	(5.1.17) (5.1.20)
$\emptyset$ und X sind die einzigen Zerlegungsmengen von $\underline{X}$	$\emptyset$ und X sind die einzigen uniformen Zerlegungsmengen von $\underline{X}$	(5.1.10)

$\underline{X}$ zusammenhängend	$\underline{X}$ uniform zusammenhängend	
jeder zu $\underline{X}$ topologisch isomorphe Raum ist uniform zusammenhängend	$\underline{X}$ ist verkettet, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ und je 2 Punkte x und y von X existiert eine Folge $(x_1,\ldots,x_n)$ mit $x_1 = x$, $x_n = y$ und $d(x_1,x_{i+1}) < \varepsilon$ für $i = 1,\ldots,n-1$	(5.1.31(4)) (5.1.14)
zu je zwei nicht-leeren Teilmengen A und B von X existiert ein $x \in X$ mit $\operatorname{dist}(x,A) = \operatorname{dist}(x,B)$		(5.1.31(5))

<u>Verhalten gegen Konstruktionen</u>:

(Gleichmäßig) stetige Bilder (uniform) zusammenhängender Räume sind (uniform) zusammenhängend. (5.1.3)
Dichte Teilräume uniform zusammenhängender Räume sind uniform zusammenhängend. (5.1.6)
Ist ein dichter Teilraum von $\underline{X}$ (uniform) zusammenhängend, so ist auch $\underline{X}$ (uniform) zusammenhängend. (5.1.5)

<u>Kompakte, zusammenhängende Räume</u>: Ein kompakter Raum ist genau dann zusammenhängend, wenn er uniform zusammenhängend ist. (5.1.27)

<u>Schnittpunkte in zusammenhängenden Räumen</u>: Ein Punkt x eines zusammenhängenden Raumes $\underline{X}$ heißt Schnittpunkt von x, wenn $\underline{X \setminus \{x\}}$ nicht zusammenhängend ist. (5.1.23)

<u>Zusammenhangskomponenten</u>: Zu jedem Punkt x eines metrischen Raumes $\underline{X}$ gibt es unter allen x enthaltenden, (uniform) zusammenhängenden Teilräumen von $\underline{X}$ einen größten $\underline{K(x)}$ $(\overline{K_u(x)})$, genannt (uniforme) Zusammenhangskomponente von x in $\underline{X}$. (5.1.29)

<u>Totaler Unzusammenhang</u>: Totaler Unzusammenhang ist eine topologische Eigenschaft, uniformer totaler Unzusammenhang eine uniforme Eigenschaft. (5.2.5)

In folgendem Schema sind die Aussagen in jeder Spalte äquivalent:

$\underline{X}$ total-unzusammenhängend	$\underline{X}$ uniform total-unzusammenhängend	
jeder zusammenhängende Teilraum von $\underline{X}$ enthält höchstens einen Punkt	jeder uniform zusammenhängende Teilraum von $\underline{X}$ enthält höchstens einen Punkt	(5.2.1)
jede stetige Abbildung von einem zusammenhängenden Raum nach $\underline{X}$ ist konstant	jede gleichmäßig stetige Abbildung von einem uniform zusammenhängenden Raum nach $\underline{X}$ ist konstant	(5.2.1o)

Verhalten gegen Konstruktionen: Jeder Teilraum eines (uniform) total-unzusammenhängenden Raumes ist (uniform) total-unzusammenhängend. (5.2.4)

Kompakte, total-diskontinuierliche Räume: Ist $\underline{X}$ kompakt, so sind äquivalent:

(a) $\underline{X}$ ist total-unzusammenhängend.

(b) $\underline{X}$ ist uniform total-unzusammenhängend.

(c) Zu jeder Umgebung U eines Punktes $x \in X$ gibt es eine Zerlegungsmenge B von $\underline{X}$ mit $x \in B \subset U$.

(d) Zu jeder gleichmäßigen Umgebung U einer Teilmenge A von X gibt es eine uniforme Zerlegungsmenge B von $\underline{X}$ mit $A \subset B \subset U$. (5.2.12/5.2.13)

Cantorsches Diskontinuum $\underline{\mathbb{D}}$: $\underline{\mathbb{D}}$ ist durch folgende Eigenschaften (bis auf uniforme Isomorphie) charakterisiert:

(0) $\mathbb{D} \neq \emptyset$.

(1) $\underline{\mathbb{D}}$ ist kompakt.

(2) $\underline{\mathbb{D}}$ ist total-unzusammenhängend.

(3) $\underline{\mathbb{D}}$ ist in sich dicht. (5.3.4)

Fortsetzbarkeitssätze für das Cantorsche Diskontinuum:

(1) Jede stetige Abbildung von einem abgeschlossenen Teilraum von $\underline{\mathbb{D}}$ in einen nicht-leeren metrischen Raum hat eine stetige Fortsetzung auf $\underline{\mathbb{D}}$. (5.3.13)

(2) Jede gleichmäßig stetige Abbildung von einem Teilraum von $\underline{\mathbb{D}}$ in einen nicht-leeren, vollständigen metrischen Raum hat eine gleichmäßig stetige Fortsetzung auf $\underline{\mathbb{D}}$. (5.3.14(4))

Mächtigkeit kompakter Räume: Jeder nicht-leere, in sich dichte, kompakte metrische Raum hat die Mächtigkeit c. (5.3.9)

Zerbrechlicher Kegel $\underline{\mathbb{K}}$: $\underline{\mathbb{K}}$ hat u.a. folgende Eigenschaften:

(0) Card $\mathbb{K}$ = c.

(1) $\underline{\mathbb{K}}$ ist zusammenhängend.

(2) Es existiert ein $x \in \mathbb{K}$, so daß $\mathbb{K} \setminus \{x\}$ total-unzusammenhängend ist. [5.4.2 5.4.3 5.4.4]

GLOSSAR ZU § 6

Konvergenz in Funktionenräumen:

Y Menge, $\underline{X}$ metrischer Raum, $f, f_n: Y \to \underline{X}$ Abbildungen.

(f_n) konvergiert einfach gegen f

$\longleftrightarrow \forall y \in Y \; (f_n(y)) \to f(y)$ in $\underline{X}$. (6.0.1)

(f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f

$\longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \quad \forall m \geq n \quad \forall y \in Y \quad d(f_m(y), f(y)) < \varepsilon.$ (6.0.2)

Metriken in Funktionenräumen: Sei diam $X \leq 1$.

(1) Die Metrik $d_{gl}(f,g) = \sup\{d(f(y),g(y)) \mid y \in Y\}$ beschreibt die gleichmäßige Konvergenz auf $Abb(Y,X)$. (6.0)

(2) $Y = \{1,\dots,n\}$. Die Metrik

$d_n((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \max\{d(x_1,y_1),\dots,d(x_n,y_n)\}$

beschreibt die einfache Konvergenz auf X^n. $\underline{X}^n = (X^n, d_n)$. (6.1.6)

(3) $Y = \mathbb{N}$. Die Metrik

$d_{\mathbb{N}}((x_n),(y_n)) = \sup\{\frac{1}{n}\, d(x_n,y_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschreibt die einfache Konvergenz auf $X^{\mathbb{N}}$. $\underline{X}^{\mathbb{N}} = (X^{\mathbb{N}}, d_{\mathbb{N}})$. (6.2.5)

(4) $Y = \mathbb{R}$. Es gibt keine Metrik, welche die einfache Konvergenz auf $Abb(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ beschreibt. (6.6.1)

Eigenschaften von Funktionenräumen:

Für jede der folgenden Eigenschaften E metrischer Räume sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) $\underline{X}$ hat die Eigenschaft E.

(b) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $\underline{X}^n$ die Eigenschaft E hat.

(c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ hat $\underline{X}^n$ die Eigenschaft E.

(d) $\underline{X}^{\mathbb{N}}$ hat die Eigenschaft E:

Vollständigkeit	(6.1.8 /6.2.8)
Totale Beschränktheit	(6.1.9 /6.2.9)
Kompaktheit	(6.1.1o/6.2.1o)
Topologische Vollständigkeit	(6.1.11/6.2.11)
Separabilität	(6.1.12/6.2.12)
(Uniformer) Zusammenhang	(6.1.13/6.2.13)
(Uniformer) totaler Unzusammenhang	(6.1.14/6.2.14)

Eigenschaften von $\underline{Y} = \underline{X}^{\mathbb{N}}$:

(1) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sind $\underline{Y}$ und $\underline{Y}^n$ uniform isomorph. (6.2.16(2))

(2) $\underline{Y}$ und $\underline{Y}^{\mathbb{N}}$ sind uniform isomorph. (6.2.16(1))

(3) Gilt Card $X \geq 2$, so ist $\underline{Y}$ in sich dicht. (6.2.15)

Spezielle Räume:

$\underline{\{0,1\}^{\mathbb{N}}}$ ist zum Cantorschen Diskontinuum $\underline{\mathbb{D}}$ uniform isomorph. (6.3.2)

$\underline{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$ ist zu $\underline{\mathbb{P}}$ topologisch (jedoch nicht uniform) (vgl. 6.2.14)) isomorph. (6.5.3)

$\underline{\mathbb{H}} = \underline{[0,1]^{\mathbb{N}}}$ heißt Hilbert-Quader. (6.4.1)

Struktursätze:

(1) Äquivalent sind: (a) $\underline{X}$ ist kompakt.

(b) $\underline{X}$ ist zu einem abgeschlossenen Teilraum von $\underline{\mathbb{H}}$ topologisch (bzw. uniform) isomorph.

(c) $\underline{X}$ ist (gleichmäßig) stetiges Bild von $\underline{\mathbb{D}}$ oder leer. (6.4.9)

(2) Äquivalent sind: (a) $\underline{X}$ ist kompakt und total-unzusammenhängend.

(b) $\underline{X}$ ist zu einem abgeschlossenen Teilraum von $\underline{\mathbb{D}}$ topologisch (bzw. uniform) isomorph. (6.3.3)

(3) Äquivalent sind: (a) $\underline{X}$ ist total beschränkt.
(b) $\underline{X}$ ist Teilraum eines kompakten Raumes.
(c) $\underline{X}$ ist zu einem Teilraum von $\underline{\mathbb{H}}$ uniform isomorph. (6.4.1o)

(4) Äquivalent sind: (a) $\underline{X}$ ist separabel.
(b) $\underline{X}$ ist zu einem total beschränkten Raum topologisch isomorph.
(c) $\underline{X}$ ist zu einem Teilraum von $\underline{\mathbb{H}}$ topologisch isomorph. (6.4.8)

(5) Äquivalent sind: (a) $\underline{X}$ ist separabel und topologisch vollständig.
(b) $\underline{X}$ ist zu einem G_δ-Teilraum von $\underline{\mathbb{H}}$ topologisch isomorph. (6.4.11)

Fortsetzbarkeitssatz für stetige Abbildungen aus kompakten, total-unzusammenhängenden Räumen: Jede stetige Abbildung von einem abgeschlossenen Teilraum eines kompakten, total-unzusammenhängenden Raumes $\underline{X}$ in einen nicht-leeren metrischen Raum hat eine stetige Fortsetzung auf $\underline{X}$. (6.3.4)

GLOSSAR ZU § 7

Topologie-Axiome (7.1.1)

(T1) $\mathrm{cl}\ \emptyset = \emptyset$
(T2) $A \subset \mathrm{cl}\ A$
(T3) $\mathrm{cl}(A \cup B) = \mathrm{cl}\ A \cup \mathrm{cl}\ B$
(T4) $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}\ A) = \mathrm{cl}\ A$
Symmetrie: $x \in \mathrm{cl}\{y\} \Longleftrightarrow y \in \mathrm{cl}\{x\}$

$f: (X,\mathrm{cl}) \to (X',\mathrm{cl}')$ stetig $\Longleftrightarrow \forall A \in X: f[\mathrm{cl}\ A] \subset \mathrm{cl}' f[A]$ (7.1.1)

Für jede Metrik d ist cl_d eine symmetrische Topologie auf X. Stetigkeit im metrischen Sinne bedeutet Stetigkeit im topologischen Sinne. Topologische Äquivalenz von Metriken bedeutet Gleichheit der induzierten Topologien. (7.1.2)

Nachbarschafts-Axiome

(N1) $A\ \delta\ B \Rightarrow B\ \delta\ A$
(N2) $A\ \delta\ B \Rightarrow A \neq \emptyset$

(N3) $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow A\ \delta\ B$

(N4) $A\ \delta\ (B \cup C) \Leftrightarrow (A\ \delta\ B$ oder $A\ \delta\ C)$

(N5) $A\ \delta\ (cl_\delta B) \Rightarrow A\ \delta\ B$ mit $cl_\delta B = \{x \in X \mid \{x\}\ \delta\ B\}$ (7.2.1)

Regularität: B gleichmäßige Umgebung von A $\Rightarrow \exists\ C$: B gleichmäßige Umgebung von C und C gleichmäßige Umgebung von A (7.2.6)

$f : (X,\delta) \to (X',\delta')$ gleichmäßig stetig
$\Leftrightarrow \forall\ A,B \subset X$: $(A\ \delta\ B \Rightarrow f[A]\ \delta'\ f[B])$ (7.2.1)

Für jede Metrik d ist durch $A\ \delta\ (d)\ B \Leftrightarrow dist_d(A,B) = 0$ eine reguläre Nachbarschaftsstruktur auf X definiert. Gleichmäßige Stetigkeit im metrischen Sinne bedeutet gleichmäßige Stetigkeit im Sinne der induzierten Nachbarschaftsstrukturen. Uniforme Äquivalenz von Metriken bedeutet Gleichheit der induzierten Nachbarschaftsstrukturen. (7.2.2/7.2.7)

Für jede Nachbarschaftsstruktur δ ist cl_δ eine symmetrische Topologie. Gleichmäßig stetige Abbildungen im Sinne der Nachbarschaftsstrukturen sind stetig im Sinne der induzierten Topologien. (7.3.1)

Für jede symmetrische Topologie cl ist durch $A\ \delta(d)\ B \Leftrightarrow cl\ A \cap cl\ B \neq \emptyset$ eine Nachbarschaftsstruktur $\delta(cl)$ definiert. Stetige Abbildungen im Sinne der Topologien sind gleichmäßig stetig im Sinne der induzierten Nachbarschaftsstrukturen. (7.3.2/7.3.4(5)

<u>Induzierte Strukturen:</u>

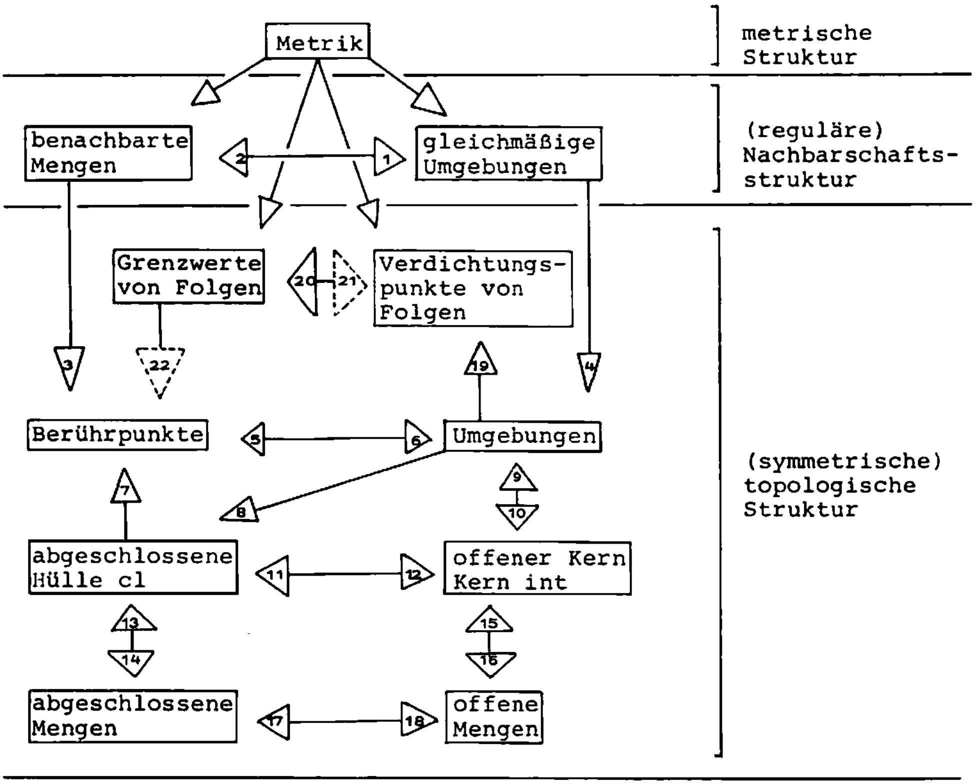
Metrik — Nachbarschaftsstruktur — symmetrische Topologie

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, mapsto] \arrow[d, mapsto] & \delta(d) \arrow[d, mapsto] & \delta \arrow[d, mapsto] & \delta(cl) \arrow[d, mapsto] & cl \arrow[l, mapsto] \arrow[d, equal] \\
cl_d \arrow[r, phantom, "="] & cl_\delta(d) & cl_\delta & cl_{\delta(cl)} \arrow[r, phantom, "="] & cl
\end{tikzcd}$$

symmetrische Topologie

<u>Begriffsgefüge</u> (zum folgenden Diagramm)
Die ausgezogenen Pfeile, soweit sie sich nur auf die Nachbarschaftsstruktur bzw. die Topologie beziehen, gelten in allen Nachbarschafts- bzw. topologischen Räumen.

Sämtliche gestrichelten Pfeile gelten in allen metrischen Räumen, jedoch nicht in allen Nachbarschafts- bzw. topologischen Räumen.



(1) A gleichmäßige Umgebung von B
$\longleftrightarrow$ B und X\A nicht benachbart (7.2.3)

(2) A und B benachbart
$\longleftrightarrow$ X\B keine gleichmäßige Umgebung von A (7.2.4(1))

(3) x Berührpunkt von A
$\longleftrightarrow$ {x} und A benachbart (7.2.1(1))

(4) A Umgebung von x
$\longleftrightarrow$ A gleichmäßige Umgebung von {x} (7.3.4(3))

(5) x Berührpunkt von A
$\longleftrightarrow$ X\A keine Umgebung von x (7.1.6(1o))

(6) A Umgebung von x
$\longleftrightarrow$ x kein Berührpunkt von X\A (7.1.6(1o))

(7) x Berührpunkt von A $\Longleftrightarrow$ x $\in$ cl A (7.1.4(1))

(8) x $\in$ cl A
$\Longleftrightarrow$ für jede Umgebung U von x gilt A $\cap$ U $\neq \emptyset$ (7.1.6(9))

(9) A Umgebung von x $\Longleftrightarrow$ x $\in$ int A (7.1.4(5))

(1o) x $\in$ int A
$\Longleftrightarrow$ es gibt eine Umgebung U von x mit U $\subset$ A (7.1.6(5))

(11) cl A = X\int (X\A) (7.1.6(11))

(12) int A = X\cl (X\A) (7.1.4(4))

(13) cl A = $\cap$ {B $\subset$ X | A $\subset$ B und B abgeschlossen} (7.1.6(3))

(14) A abgeschlossen $\Longleftrightarrow$ A = cl A (7.1.4(2))

(15) int A = $\cup$ {B $\subset$ X | B $\subset$ A und B offen} (7.1.6(7))

(16) A offen $\Longleftrightarrow$ A = int A (7.1.6(8))

(17) A abgeschlossen $\Longleftrightarrow$ X\A offen (7.1.6(13))

(18) A offen $\Longleftrightarrow$ X\A abgeschlossen (7.1.6(14))

(19) x Verdichtungspunkt von (x_n)
$\Longleftrightarrow$ jede Umgebung von x enthält unendlich viele
Glieder von (x_n) (7.1.4(7))

(2o) x Grenzwert von (x_n)
$\Longleftrightarrow$ x Verdichtungspunkt jeder Teilfolge von (x_n) (7.1.6(16))

(21) x Verdichtungspunkt von (x_n)
$\Longleftrightarrow$ es existiert eine Teilfolge von (x_n), die x
als Grenzwert besitzt (1.3.2o(3))

(22) x Berührpunkt von A
$\Longleftrightarrow$ es existiert eine Folge in A, die x als
Grenzwert besitzt (1.3.11)