§ 3 Vollständige Metrische Räume

STUDIERHINWEISE ZU § 3

Im § 3 werden im Abschnitt 3.1 die Begriffe Cauchy-Folge und Vollständigkeit eingeführt. Sie gehören zu den zentralen Begriffen der Theorie metrischer Räume. Dem Bearbeiter sei empfohlen, sich mit ihnen anhand der im Text angeführten (und evtl. anderer) Beispiele besonders sorgfältig auseinanderzusetzen.

In 3.2 wird gezeigt, daß die Fortsetzbarkeitssätze von § 2 für Abbildungen in vollständige Räume z.T. erheblich verbessert werden können. Die verbesserten Fortsetzbarkeitssätze werden sich als wichtige Werkzeuge erweisen. Ihre Beweise können jedoch wieder vergessen werden.

In 3.3 wird der zwar sehr einfache, dennoch aus praktischen und theoretischen Gründen sehr wichtige, Banachsche Fixpunktsatz bewiesen. Hier sollte nicht nur die Formulierung des Satzes, sondern auch sein Beweis in allen Details gedächtnismäßig festgehalten werden. Die Anwendung auf Differentialgleichungen hat im vorliegenden Text nur illustrierenden Charakter und kann getrost überschlagen werden.

In 3.4 wird der Bairesche Kategoriensatz bewiesen, der eine Fülle von Anwendungen innerhalb und außerhalb der Topologie hat. Die zur Formulierung des Satzes benötigten Begriffe sind ebenso wie der Beweis des Satzes recht diffizil und sollten in Ruhe und mit Sorgfalt studiert werden. Den Beweis muß man sich jedoch nicht unbedingt ins Gedächtnis einprägen.

3.5 enthält einige interessante Ergebnisse von etwas geringerer Wichtigkeit. Das Verständnis für Unterschiede und Ähnlichkeiten des uniformen Begriffs "vollständig" und des topologischen Begriffs "topologisch vollständig" soll entwickelt werden. Er erweist sich als nützlich zum Verständnis mathematischer Begriffsbildungen im allgemeinen.

In 3.6 wird gezeigt, daß sich - ebenso wie $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ - jeder metrische Raum $\underline{X}$ dicht an einen vollständigen metrischen Raum Compl $\underline{X}$ einbetten läßt, der bis auf metrische Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Für diesen nützlichen Satz werden zwei völlig verschiedene Beweise geliefert. Der erste (3.6.4) ist kurz und elegant, der zweite (3.6.1o), welcher der Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ nachgebildet wurde, ist zwar komplizierter, vermittelt aber eine bessere Vorstellung von Compl $\underline{X}$. Deshalb sollten beide Beweise sorgfältig studiert werden. Auch sei empfohlen, sich für jeden der bisher untersuchten Räume $\underline{X}$ eine möglichst klare Vorstellung von Compl $\underline{X}$ zu verschaffen.

3.0 EINFÜHRUNG

In den vorangegangenen Paragraphen haben wir die Grundlagen für das Studium metrischer Räume gelegt. Jetzt sind wir in der Lage, zwei der wichtigsten Sätze des gesamten Kurses zu beweisen: den Banachschen Fixpunktsatz und den Baireschen Kategoriensatz. Beide haben vielfältige Anwendungen innerhalb und außerhalb der Topologie. Wir werden uns darauf beschränken, für jeden dieser Sätze je eine nicht-triviale Anwendung darzulegen: für den Banachschen Fixpunktsatz einen Satz über die eindeutige Lösbarkeit gewisser Differentialgleichungen, für den Baireschen Kategoriensatz einen Satz über das Stetigkeitsverhalten

des Grenzwerts einer Folge (f_n) stetiger Funktionen $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes wird im folgenden dargestellt, kann aber beim ersten Lesen überschlagen werden. Auf Differentialgleichungen werden wir im Laufe dieses Kurses nicht weiter eingehen. Aus der eben genannten Anwendung des Baireschen Kategoriensatzes werden wir hingegen in Paragraph 6 einige grundsätzliche Folgerungen ziehen, die die Tragweite des Begriffs "metrischer Raum" für topologische Untersuchungen genauer eingrenzt. Sowohl der Banachsche Fixpunktsatz als auch der Bairesche Kategoriensatz liefern eine Aussage über metrische Räume, die vollständig sind. Vollständigkeit, - eine naheliegende Verallgemeinerung des aus der Analysis bekannten Begriffs -, ist ohne Zweifel eine der wichtigsten Eigenschaften metrischer Räume. Sie hat, wie obige Sätze zeigen, sehr gravierende Konsequenzen. Auch sei daran erinnert, daß es im wesentlichen die Unvollständigkeit des Raumes $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen war, welche Mathematiker bewog, die reellen Zahlen überhaupt zu erfinden. In diesem Paragraphen werden wir vollständige metrische Räume sorgfältig untersuchen. Neben den beiden genannten Sätzen werden die Sätze über die Fortsetzbarkeit gleichmäßig stetiger Abbildungen weiter verbessert werden. Außerdem erhalten wir ein weiteres Kriterium, das es gestattet, die wesentliche Verschiedenheit metrischer Räume nachzuweisen. U.a. wird sich zeigen, daß keine zwei der topologisch isomorphen Räume $]0,1[$, $\{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}$ und $\mathbb{R}$ uniform isomorph sind.

Im letzten Abschnitt 3.6 werden wir zeigen, daß sich nicht nur $\mathbb{Q}$, sondern jeder metrische Raum durch Hinzufügen geeigneter neuer Punkte vervollständigen läßt.

3.1 CAUCHY-FOLGEN, VOLLSTÄNDIGKEIT METRISCHER RÄUME

Sei $\underline{X} = (X,d)$ *ein metrischer Raum,* (x_n) *eine Folge in* X, $A \subset X$.

3.1.1 DEFINITION

(x_n) heißt *Cauchy-Folge*, wenn gilt:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \quad \forall m \geq n \quad d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

3.1.2 DEFINITION

Sei $A \subset X$. $\quad \operatorname{diam} A := \begin{cases} 0, & \text{, falls } A = \emptyset \\ \sup\{d(a,b) \mid a \in A,\ b \in A\}, & \text{falls } A \neq \emptyset. \end{cases}$

A heißt *beschränkt*, falls $\operatorname{diam} A < \infty$ gilt.

Die Abkürzung diam kommt vom Englischen diameter (= Durchmesser).

3.1.3 SATZ

Äquivalent sind:

(a) (x_n) *ist Cauchy-Folge.*

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}\{x_m \mid m \geq n\} = 0$.

(c) *Je zwei Teilfolgen von* (x_n) *sind benachbart.*

Beweis:

(a) $\Longleftrightarrow$ (b): Aufgabe 3.1.14(4).

(b) $\Rightarrow$ (c): Seien $(y_i) = (x_{n_i})$ und $(z_i) = (x_{m_i})$ Teilfolgen von (x_n). Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein n_0, so daß aus $m \geq n_0$ und $m' \geq n_0$ stets $d(x_m, x_{m'}) < \varepsilon$ folgt. Man setze $i_0 := \min\{i \mid n_i \geq n_0,\ m_i \geq n_0\}$. Dann ist für $i \geq i_0$ stets $d(y_i, z_i) = d(x_{n_i}, y_{n_i}) < \varepsilon$.

(c) $\Rightarrow$ (a): Wäre (x_n) keine Cauchy-Folge, so gäbe es ein $\varepsilon>0$ und zu jedem n Zahlen $m(n) \geq n$ und $m'(n) \geq n$ mit $d(x_{m(n)}, x_{m'(n)}) \geq \varepsilon$. Folglich könnte man durch Induktion folgendermaßen zwei nicht benachbarte Teilfolgen $(y_i) = (x_{n_i})$ und $(z_i) = (x_{m_i})$ von (x_n) konstruieren. Induktionsanfang: Wähle $n_1 = m(1)$ und $m_1 = m'(1)$. Induktionsschluß: Seien $n_1, n_2, \ldots, n_r$ und $m_1, m_2, \ldots, m_r$ bereits definiert. Sei $s := 1+\max\{n_r, m_r\}$. Wähle $n_{r+1} = m(s)$ und $m_{r+1} = m'(s)$. Die Folgen (x_{n_i}) und (x_{m_i}) sind nicht benachbart; denn für alle i gilt $d(x_{n_i}, x_{m_i}) \geq \varepsilon$.

3.1.4 FOLGERUNG

Ist $f\colon \underline{X} \to \underline{Y}$ *gleichmäßig stetig und ist* (x_n) *eine Cauchy-Folge in* X, *so ist* $(f(x_n))$ *eine Cauchy-Folge in* $\underline{Y}$.

Beweis:

Ist (x_n) eine Cauchy-Folge, so sind je zwei Teilfolgen von (x_n) benachbart. Also sind je zwei Teilfolgen von $(f(x_n))$ benachbart. Somit ist $(f(x_n))$ eine Cauchy-Folge.

3.1.5 BEMERKUNG

Der Begriff "Cauchy-Folge" ist nach 3.1.4 ein uniformer Begriff. Sind insbesondere d und d' uniform äquivalente Metriken auf einer Menge X, so ist eine Folge genau dann Cauchy-Folge bzgl. d, wenn sie Cauchy-Folge bzgl. d' ist. Der Begriff "Cauchy-Folge" ist aber kein topologischer Begriff. So werden durch $d(x,y) = |x - y|$ und $d'(x,y) = |e^x - e^y|$ topologisch äquivalente Metriken auf $\mathbb{R}$ definiert und $(-n)$ ist Cauchy-Folge bzgl. d', aber nicht bzgl. d.

3.1.6 SATZ

Ist (x_n) *Cauchy-Folge, so ist* $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ *beschränkt.*

Beweis:

Es existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{diam}\{x_m | m \geq n\} < 1$. Ist $r = \max\{d(x_i, x_n) | i=1,\ldots,n\}$, so gilt $\operatorname{diam}\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \leq 2(r+1)$.

3.1.7 SATZ

Sind (x_n) *und* (y_n) *benachbart, so sind äquivalent:*

(a) (x_n) *ist Cauchy-Folge.*

(b) (y_n) *ist Cauchy-Folge.*

Beweis:

Sei (x_n) Cauchy-Folge. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein n_o mit $\operatorname{diam}\{x_m | m \geq n_o\} < \frac{\varepsilon}{3}$ und ein n_1, so daß aus $n \geq n_1$ stets $d(x_n, y_n) < \frac{\varepsilon}{3}$ folgt. Somit folgt aus $n \geq \max\{n_o, n_1\}$ und $m \geq \max\{n_o, n_1\}$ stets $d(y_n, y_m) \leq d(y_n, x_n) + d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) < \varepsilon$. Also ist (y_n) Cauchy-Folge.

Zwischen Cauchy-Folgen und konvergenten Folgen besteht ein enger Zusammenhang. Jede konvergente Folge ist Cauchy-Folge, und jede Cauchy-Folge mit einem Verdichtungspunkt ist konvergent.

3.1.8 SATZ

Äquivalent sind:

(a) $(x_n) \to x$.

(b) (x_n) *ist Cauchy-Folge mit Verdichtungspunkt* x.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Wir wissen bereits, daß der Limes von (x_n) ein Verdichtungspunkt von (x_n) ist. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein n, so daß aus $m \geq n$ stets $d(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ folgt. Also folgt aus $m \geq n$ und $m' \geq n$ stets $d(x_m, x_{m'}) \leq d(x_m, x) + d(x, x_{m'}) < \varepsilon$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_o mit $\operatorname{diam}\{x_m | m \geq n_o\} < \frac{\varepsilon}{2}$ und ein $n_1 \geq n_o$ mit $d(x, x_{n_1}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Somit folgt aus $m \geq n_o$ stets $d(x, x_m) \leq d(x, x_{n_1}) + d(x_{n_1}, x_m) < \varepsilon$.

3.1.9 DEFINITION

$\underline{X}$ heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in $\underline{X}$ konvergiert.

Bevor wir uns Beispielen zuwenden, sollen die vollständigen Teilräume eines vollständigen Raumes charakterisiert werden.

3.1.10 SATZ

Ist $\underline{A}$ Teilraum eines vollständigen Raumes $\underline{X}$, so sind äquivalent:

(a) $\underline{A}$ *ist vollständig.*

(b) A *ist abgeschlossen in* $\underline{X}$.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Ist x Berührpunkt von A in $\underline{X}$, so gibt es eine Folge (a_n) in A, die in $\underline{X}$ gegen x konvergiert. Also ist (a_n) eine Cauchy-Folge in $\underline{X}$ und somit auch in $\underline{A}$. Wegen (a) konvergiert (a_n) in $\underline{A}$ gegen ein $a \in A$. Hieraus folgt, daß (a_n) auch in $\underline{X}$ gegen a konvergiert. Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes gilt somit $x = a \in A$. Folglich ist A abgeschlossen in $\underline{X}$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Ist (a_n) eine Cauchy-Folge in $\underline{A}$, so ist (a_n) auch Cauchy-Folge in $\underline{X}$, konvergiert somit in $\underline{X}$ gegen ein $x \in X$. Aus (b) folgt $x \in A$. Also konvergiert (a_n) gegen x in $\underline{A}$.

3.1.11 BEISPIELE

(1) Aus der Analysis ist bekannt, daß $\underline{\mathbb{R}^n}$ für jedes n vollständig ist. Insbesondere sind die Räume

(i) $\underline{\mathbb{R}}$, $\underline{[0,1]}$, $\underline{\{0,1\}}$, $\underline{\mathbb{N}}$ und
$\underline{\mathbb{R}^+} = \underline{\{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}}$ vollständig,

(ii) $\underline{]0,1[}$, $\underline{\{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}}$, $\underline{\mathbb{Q}}$ und $\underline{\mathbb{P}} = \underline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$ nicht vollständig.

(2) Jeder diskrete Raum ist vollständig.

(3) Jeder X-stachlige Igel (1.1.5) ist vollständig.

(4) Für jede Menge X ist der Raum $\underline{B(X)} = (B(X),d)$ aller beschränkten Abbildungen $f: X \to \underline{\mathbb{R}}$ mit der Supremum-Metrik d vollständig. Ist nämlich (f_n) eine Cauchy-Folge in $\underline{B(X)}$, so ist $(f_n(x))$ für jedes $x \in X$ eine Cauchy-Folge in $\underline{\mathbb{R}}$, konvergiert somit gegen einen Wert $f(x) \in \mathbb{R}$. Für $\varepsilon > 0$ existiert ein n_o mit $d(f_m,f_{m'}) < \varepsilon$ für alle $m \geq n_o$ und $m' \geq n_o$. Also gilt $|f_m(x) - f_{m'}(x)| < \varepsilon$ für alle $m \geq n_o$, $m' \geq n_o$ und alle $x \in X$. Hieraus folgt

1. $|f(x) - f_{n_o}(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in X$, also ist die durch $x \mapsto f(x)$ definierte Abbildung $f: X \to \mathbb{R}$ beschränkt und somit ein Element von $B(X)$.
2. $d(f,f_m) \leq \varepsilon$ für alle $m \geq n_o$. (Begründen Sie dies!) Also konvergiert (f_n) bzgl. d gegen f.

(5) Ist $\underline{X}$ ein metrischer Raum, so sind die folgenden Teilräume von $\underline{B(X)}$ nach 2.3.4 abgeschlossen und somit vollständig:

(i) der Raum $\underline{C(X,[0,1])}$ aller stetigen Abbildungen von $\underline{X}$ nach $\underline{[0,1]}$,

(ii) der Raum $\underline{U(X,[0,1])}$ aller gleichmäßig stetigen Abbildungen von $\underline{X}$ nach $\underline{[0,1]}$,

(iii) der Raum $\underline{C^*(X)}$ aller beschränkten, stetigen Abbildungen von $\underline{X}$ nach $\underline{\mathbb{R}}$,

(iv) der Raum $\underline{U^*(X)}$ aller beschränkten, gleichmäßig stetigen Abbildungen von $\underline{X}$ nach $\underline{\mathbb{R}}$.

(6) Ein normierter Vektorraum heißt Banach-Raum, wenn er bzgl. der in 1.1.2(4) definierten Metrik vollständig ist.

3.1.12 BEMERKUNGEN

(1) Aus 3.1.4 folgt, daß jeder zu einem vollständigen Raum uniform isomorphe Raum selbst vollständig ist. Die Eigenschaft eines Raumes, vollständig zu sein, ist also eine uniforme Eigenschaft. Der Raum $\underline{\mathbb{R}}$ ist vollständig, die zu $\underline{\mathbb{R}}$ topologisch isomorphen Räume $\underline{]0,1[}$ und $\underline{\{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}}$ sind hingegen nicht vollständig. Also ist weder $\underline{]0,1[}$ noch $\underline{\{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}}$ zu $\underline{\mathbb{R}}$ uniform isomorph. Die Eigenschaft eines Raumes, vollständig zu sein, ist keine topologische Eigenschaft.

(2) Die Räume $\underline{]0,1[}$ und $\underline{\{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}}$ sind zwar topologisch isomorph, aber nicht uniform isomorph; denn in $\underline{\{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}}$ sind je zwei nicht-konvergente Cauchy-Folgen benachbart (sie konvergieren nämlich in $\underline{\mathbb{R}}$ gegen 0, vgl. auch 3.1.14(6)), aber in $\underline{]0,1[}$ sind $(\frac{1}{n})$ und $(\frac{n-1}{n})$ zwei nicht-konvergente, nicht-benachbarte Cauchy-Folgen.

(3) Beim Beweis der Implikation (a) $\Rightarrow$ (b) in Satz 3.1.1o wurde die Vollständigkeit von $\underline{X}$ nicht benutzt. Es gilt also allgemein: Ist $\underline{A}$ ein vollständiger Teilraum von $\underline{X}$, so ist A abgeschlossen in $\underline{X}$.

3.1.13 SATZ

Äquivalent sind:

(a) $\underline{X}$ *ist vollständig.*

(b) *Für jede monoton fallende Folge* $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ *nicht-leerer Teilmengen* A_n *von* X *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} (\operatorname{diam} A_n) = 0$ *gilt* $\bigcap\limits_n \operatorname{cl} A_n \neq \emptyset$.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b): Wählt man in jedem A_n ein Element a_n, so ist (a_n) eine Cauchy-Folge, konvergiert also gegen ein $x \in X$. Für jedes n ist $(a_n, a_{n+1}, \ldots)$ eine gegen x konvergierende Folge, die ganz in A_n liegt. Somit ist x Berührpunkt von jedem A_n, d.h. $x \in \bigcap\limits_n \operatorname{cl} A_n$.

(b) $\Rightarrow$ (a): Ist (x_n) eine Cauchy-Folge, so ist die Folge $(A_n) = (\{x_m | m \geq n\})$ eine monoton fallende Folge nicht-leerer Mengen mit $\lim_{n\to\infty} (\text{diam } A_n) = 0$. Also gibt es ein x in $\bigcap_n \text{cl}A_n$. Dann ist x Berührpunkt von jedem A_n, somit Verdichtungspunkt der Folge (x_n) und folglich wegen 3.1.8 Grenzwert der Cauchy-Folge (x_n).

3.1.14 AUFGABEN

Zeigen Sie:

(1) diam(clA) = diam A für jede Teilmenge A von $\underline{X}$. Gilt auch stets diam (int A) = diam A?

(2) diam $S(x,r) \leq 2r$. Gilt stets Gleichheit?

(3) $\underline{X}$ ist genau dann ultrametrisch, wenn diam $S(x,r) \leq r$ für jede offene Kugel $S(x,r)$ in $\underline{X}$ gilt. (Vergl. 1.2.32(7)).

(4) Eine Folge (x_n) in $\underline{X}$ ist genau dann eine Cauchy-Folge, wenn gilt: $\lim_{n\to\infty} \text{diam } \{x_m | m \geq n\} = 0$.

(5) Eine Cauchy-Folge konvergiert genau dann, wenn sie eine konvergente Teilfolge besitzt.

(6) Je zwei nicht-konvergente Cauchy-Folgen in $\underline{X} = \underline{\{r \in \mathbb{R} | r > 0\}}$ sind benachbart.

(7) Die metrischen Räume l_∞, l_1 und l_2 sind vollständig. (Vergl. 1.1.12(2)).

(8) Bair(X) ist für jedes X vollständig. [Vgl. 1.2.32(8),1.3.22(5)]

(9) Ist $\underline{X}$ ein metrischer Raum, so wird auf der Menge aller nichtleeren, beschränkten, abgeschlossenen Mengen in $\underline{X}$ durch $d(A,B) = \text{Max}\{\text{Sup } \{\text{dist}(a,B) | a \in A\}, \text{Sup } \{\text{dist}(b,A) | b \in B\}\}$ eine Metrik definiert. Der zugehörige metrische Raum wird mit Hyp $\underline{X}$ bezeichnet und Hyperraum von $\underline{X}$ genannt. $\underline{X}$ ist zu einem abgeschlossenen Teilraum von Hyp $\underline{X}$ metrisch isomorph.

3.2 FORTSETZUNG (GLEICHMÄSSIG) STETIGER ABBILDUNGEN IN VOLLSTÄNDIGE METRISCHE RÄUME

3.2.1 DEFINITION

Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes $\underline{X}$ heißt *dicht* in $\underline{X}$, wenn clA = X gilt.

3.2.2 BEISPIEL

$\mathbb{Q}^n$ ist dicht in $\underline{\mathbb{R}}^n$.

3.2.3 THEOREM (*Fortsetzbarkeitstheorem für gleichmäßig stetige Abbildungen in vollständige Räume*)

Jede gleichmäßig stetige Abbildung $f: \underline{A} \to \underline{Y}$ *von einem dichten Unterraum* $\underline{A}$ *eines Raumes* $\underline{X}$ *in einen vollständigen Raum* $\underline{Y}$ *läßt sich eindeutig zu einer gleichmäßig stetigen Abbildung* $g: \underline{X} \to \underline{Y}$ *fortsetzen.*

Beweis:

Da A dicht in $\underline{X}$ ist, kann man für jedes $x \in X$ eine Folge (x_n) in A finden, die gegen x konvergiert. Für jedes $x \in X$ wählen wir eine derartige Folge (x_n). Dann ist (x_n) Cauchy-Folge in $\underline{A}$ nach 3.1.8. Somit ist gemäß 3.1.4 $(f(x_n))$ Cauchy-Folge in $\underline{Y}$, konvergiert also wegen der Vollständigkeit von $\underline{Y}$ gegen einen Wert in $\underline{Y}$, den wir mit $g(x)$ bezeichnen. Die durch $x \mapsto g(x)$ definierte Abbildung $g: \underline{X} \to \underline{Y}$ ist wegen der Stetigkeit von f eine Fortsetzung von f. Sie ist der einzig mögliche Kandidat für eine stetige Fortsetzung von f, denn für jede <u>stetige</u> Fortsetzung $h: \underline{X} \to \underline{Y}$ von f folgt aus $(x_n) \to x$ stets $(h(x_n)) = (f(x_n)) \to h(x) = g(x)$, wobei für $x \in X$ (x_n) die eingangs gewählte Folge in A ist. Wir zeigen noch, daß g sogar gleichmäßig stetig ist. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so daß aus $a \in A$, $b \in A$ und $d(a,b) < \delta$ stets $d(f(a),f(b)) < \frac{\varepsilon}{2}$ folgt. Sei nun $x \in X$, $y \in X$ und $d(x,y) < \delta$. Weil $(d(x_n,y_n))$ nach 1.3.8 gegen $d(x,y)$ konvergiert, gibt es ein n, so daß aus $m \geq n$ stets $d(x_m,y_m) < \delta$ und somit $d(f(x_m),f(y_m)) < \frac{\varepsilon}{2}$ folgt. Nach 1.3.9 folgt hieraus $d(g(x),g(y)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. Also ist g gleichmäßig stetig.

3.2.4 BEMERKUNG

Analysiert man obigen Beweis, so erkennt man ohne Mühe die Richtigkeit der beiden folgenden Aussagen. Sei A dichte Teilmenge von $\underline{X}$, und seien f und $g: \underline{X} \to \underline{Y}$ Abbildungen. Dann gilt:

(1) Sind f und g stetig und gilt $f(a) = g(a)$ für alle $a \in A$, so gilt $f = g$.

(2) Ist f stetig und ist die Einschränkung $f_{|A}: \underline{A} \to \underline{Y}$ gleichmäßig stetig, so ist f gleichmäßig stetig.

3.2.5 THEOREM (*Zweites Fortsetzbarkeitstheorem für* $\underline{[0,1]}$)

Ist $\underline{A}$ *ein Teilraum von* $\underline{X}$, *so läßt sich jede gleichmäßig stetige Abbildung* $f: \underline{A} \to \underline{[0,1]}$ *zu einer gleichmäßig stetigen Abbildung* $g: \underline{X} \to \underline{[0,1]}$ *fortsetzen.*

Beweis:

$B = \mathrm{cl}A$ ist abgeschlossen in $\underline{X}$. Da A dicht in $\underline{B}$ ist, läßt sich f nach 3.2.3 zu einer gleichmäßig stetigen Abbildung $h: \underline{B} \to \underline{[0,1]}$ fortsetzen. Da B abgeschlossen in $\underline{X}$ ist, läßt sich h nach dem Fortsetzbarkeitstheorem 2.3.5 für $\underline{[0,1]}$ zu einer gleichmäßig stetigen Abbildung $g: \underline{X} \to \underline{[0,1]}$ fortsetzen.

3.2.6 BEMERKUNG

(1) Ein analoger Satz gilt nicht für $]0,1[$, z.B. läßt sich die durch $x \mapsto x$ definierte gleichmäßig stetige Abbildung $f:]0,1[\to]0,1[$ nicht zu einer stetigen Abbildung $g: [0,1] \to]0,1[$ fortsetzen.

(2) Ebensowenig gilt ein stetiges Analogon zum Fortsetzbarkeitstheorem für gleichmäßig stetige Abbildungen in vollständige Räume, z.B. läßt sich die durch $x \mapsto \frac{1}{x}$ definierte stetige Abbildung $f: \underline{\mathbb{R}\setminus\{0\}} \to \underline{\mathbb{R}}$ nicht zu einer stetigen Abbildung $g: \underline{\mathbb{R}} \to \underline{\mathbb{R}}$ fortsetzen. Jedoch läßt sich zeigen, daß sich jede stetige Abbildung $f: \underline{A} \to \underline{Y}$ eines beliebigen Teilraumes $\underline{A}$ von $\underline{X}$ in einen vollständigen Raum $\underline{Y}$ zu einer stetigen Abbildung $g: \underline{B} \to \underline{Y}$ fortsetzen läßt, wobei B eine A umfassende, nicht zu "wilde" Teilmenge von X ist. Zur Präzisierung und zum Beweis benötigen wir zwei neue Begriffe:

3.2.7 DEFINITION

Eine Teilmenge B von $\underline{X}$ heißt eine G_δ-*Menge* in $\underline{X}$, wenn es eine Folge (A_n) offener Teilmengen von $\underline{X}$ mit $B = \bigcap_n A_n$ gibt.

3.2.8 SATZ

(1) *Jede offene Teilmenge von* $\underline{X}$ *ist eine* G_δ-*Menge in* $\underline{X}$.

(2) *Jede abgeschlossene Teilmenge von* $\underline{X}$ *ist eine* G_δ-*Menge in* $\underline{X}$.

(3) *Ist* A *eine* G_δ-*Menge in* $\underline{X}$, *so ist jede* G_δ-*Menge in* $\underline{A}$ *auch eine* G_δ-*Menge in* $\underline{X}$.

Beweis:

(1) Ist A offen in $\underline{X}$, so ist A Durchschnitt der konstanten Folge (A), also G -Menge in $\underline{X}$.

(2) Sei A abgeschlossen in $\underline{X}$. Definiert man $A_n := \{x \in X \mid \mathrm{dist}(x,A) < \frac{1}{n}\}$, so ist A_n offen in $\underline{X}$ und $A = \bigcap_n A_n$. Somit ist A G_δ-Menge in $\underline{X}$.

(3) Sei A G_δ-Menge in $\underline{X}$ und B G_δ-Menge in $\underline{A}$. Dann gibt es eine Folge (A_n) offener Teilmengen von $\underline{X}$ mit $A = \bigcap_n A_n$ und eine Folge (B_n) offener Teilmengen von $\underline{A}$ mit $\bigcap_n B_n = B$. Nach 1.2.31(iv) gibt es für jedes

n eine offene Teilmenge B_n' von $\underline{X}$ mit $B_n' \cap A = B_n$. Folglich sind die Mengen $A_n \cap B_n'$ offen in $\underline{X}$, und es gilt $B = \bigcap_n (A_n \cap B_n')$.

3.2.9 BEMERKUNG

Empfindet man offene Teilmengen als schöne Teilmengen und abzählbare Durchschnitte als nicht allzu schlimm, so kann man G_δ-Mengen in $\underline{X}$ als nicht allzu "wilde" Teilmengen von $\underline{X}$ ansehen. Wie obiger Satz zeigt, sind recht viele Teilmengen von $\underline{X}$ bereits G_δ-Mengen in $\underline{X}$. Es ist in der Tat nicht ganz einfach, Teilmengen von $\underline{X}$ zu finden, die keine G_δ-Mengen in $\underline{X}$ sind. Für den Fall $\underline{X} = \underline{\mathbb{R}}$ werden wir in diesem Kapitel zeigen, daß $\mathbb{Q}$ keine G_δ-Menge in $\underline{\mathbb{R}}$ ist.

3.2.10 DEFINITION

Sei $f: \underline{A} \to \underline{Y}$ eine Abbildung einer dichten Teilmenge A von $\underline{X}$ nach $\underline{Y}$.

(1) Für jede Teilmenge B von A heißt $\omega_f(B) = \operatorname{diam} f[B]$ die *Oszillation von f auf B.*

(2) Für jedes $x \in X$ heißt
$\omega_f(x) = \inf\{\omega_f(B \cap A) \mid B$ ist Umgebung von x in $\underline{X}\}$ die *Oszillation von f in x.*

3.2.11 SATZ

Sei $f: \underline{A} \to \underline{Y}$ *eine Abbildung einer dichten Teilmenge A von* $\underline{X}$ *nach* $\underline{Y}$.

(1) *Aus* $B \subset B' \subset A$ *folgt* $\omega_f(B) \leq \omega_f(B')$.

(2) *Für jedes* $r > 0$ *ist* $\{x \in X \mid \omega_f(x) < r\}$ *offen in* $\underline{X}$.

(3) *Die Menge* $\{x \in X \mid \omega_f(x) = 0\}$ *ist eine* G_δ*-Menge in* $\underline{X}$.

(4) *f ist stetig in* $a \in \underline{A}$ *genau dann, wenn* $\omega_f(a) = 0$ *gilt.*

Beweis:

(1) und (4) sind offensichtlich.

(2) Sei $\omega_f(x) < r$. Dann gibt es eine offene Umgebung B von x mit $\operatorname{diam} f[B \cap A] < r$. Also gilt für alle $y \in B$ bereits $\omega_f(y) < r$. Somit umfaßt $\{x \in X \mid \omega_f(x) < r\}$ die Menge B, ist somit Umgebung von x, also aller ihrer Punkte, folglich offen.

(3) $\{x \in X \mid \omega_f(x) = 0\} = \bigcap_n \{x \in X \mid \omega_f(x) < \frac{1}{n}\}$ ist als Durchschnitt abzählbar vieler offener Teilmengen von $\underline{X}$ eine G_δ-Menge in $\underline{X}$.

3.2.12 SATZ

Ist $f: \underline{X} \to \underline{Y}$ *eine Abbildung zwischen metrischen Räumen, so ist* $\{x \in X \mid f$ ist stetig in $x\}$ *eine* G_δ*-Menge in* $\underline{X}$.

Beweis:

Der Satz folgt unmittelbar aus 3.2.11(3) und (4) mit A = X.

3.2.13 THEOREM (*Fortsetzbarkeitstheorem für stetige Abbildungen in vollständigen Räumen*)

Zu jeder stetigen Abbildung $f: \underline{A} \to \underline{Y}$ *eines Teilraumes* $\underline{A}$ *von* $\underline{X}$ *in einen vollständigen Raum* $\underline{Y}$ *existiert eine* A *umfassende* G_δ*-Menge* B *in* $\underline{X}$ *mit* $B \subset \mathrm{cl}A$ *und eine stetige Fortsetzung* $g: \underline{B} \to \underline{Y}$ *von* f.

Beweis:
Sei $C := \mathrm{cl}A$. Dann ist $B := \{x \in C \mid \omega_f(x) = 0\}$ eine G_δ-Menge in $\underline{C}$ und deshalb auch in $\underline{X}$. Für jedes $x \in B$ wählen wir eine feste Folge (x_n) in A mit $(x_n) \to x$. Zu jedem $r > 0$ gibt es eine Umgebung U von x in $\underline{C}$ mit $\mathrm{diam}\, f[U \cap A] < r$. Zu U gibt es ein n mit $x_m \in U$ für alle $m \geq n$. Somit gilt $\mathrm{diam}\{f(x_m) \mid m \geq n\} < r$. Die Folge $(f(x_n))$ ist also eine Cauchy-Folge, konvergiert somit gegen ein Element von $\underline{Y}$, das wir mit $g(x)$ bezeichnen. Die durch $x \mapsto g(x)$ definierte Abbildung $g: \underline{B} \to \underline{Y}$ ist wegen der Stetigkeit von f eine Fortsetzung von f. Zum Nachweis der Stetigkeit von g wähle man ein $x \in B$ und ein $r > 0$. Wegen $\omega_f(x) = 0$ gibt es eine offene Umgebung U von x in $\underline{C}$ mit $\mathrm{diam}\, f[U \cap A] < r$. Nach Konstruktion gilt $g[U \cap B] \subset \mathrm{cl}f[U \cap A]$. Also folgt
$\mathrm{diam}\, g[U \cap B] \leq \mathrm{diam}(\mathrm{cl}f[U \cap A]) = \mathrm{diam}\, f[U \cap A] < r$. Folglich gilt $\omega_g(x) = 0$, d.h. g ist stetig in x.

3.2.14 AUFGABEN

Zeigen Sie:

(1) Äquivalent sind:

(a) A ist dicht in $\underline{X}$

(b) A trifft jede nicht-leere offene Menge in $\underline{X}$

(c) A trifft jede offene Kugel von $\underline{X}$.

(2) Sei $A \subset B \subset X$. Ist A dicht (offen, abgeschlossen) in $\underline{B}$ und ist B dicht (offen, abgeschlossen) in $\underline{X}$, so ist A dicht (offen, abgeschlossen) in $\underline{X}$.

(3) Ist A dicht in $\underline{X}$, so ist $\underline{X}$ genau dann vollständig, wenn jede Cauchy-Folge in $\underline{A}$ in $\underline{X}$ konvergiert.

(4) Sei A dichte Teilmenge von $\underline{X}$, und sei $g: \underline{X} \to \underline{Y}$ Fortsetzung der gleichmäßig stetigen Abbildung $f: \underline{A} \to \underline{Y}$. Dann gilt: g ist genau dann gleichmäßig stetig, wenn g stetig ist.

(5) Ist $f: \underline{X} \to \underline{Y}$ eine Abbildung, ist A dicht in $\underline{X}$ und ist für jedes $x \in X$ die Einschränkung $f|_{A \cup \{x\}}: \underline{A \cup \{x\}} \to \underline{Y}$ stetig, so ist $f: \underline{X} \to \underline{Y}$ stetig.

3.2.15 AUFGABE

Sei $f: \underline{\mathbb{R}} \to \underline{\mathbb{R}}$ die durch folgende Vorschrift definierte Abbildung:

$$x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0 \text{ oder } x \in \mathbb{P} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ mit teilerfremden Zahlen } p \text{ und } q \\ & p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ und } q \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(i) Bestimmen Sie $\omega_f(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Bestimmen Sie $\{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig in } x\}$.

3.3 DER BANACHSCHE FIXPUNKTSATZ

3.3.1 DEFINITION

Ein Punkt $x \in X$ heißt *Fixpunkt* einer Abbildung $f: X \to X$, wenn $f(x)=x$ gilt.

3.3.2 BEMERKUNG

Eine Abbildung $f: X \to X$ kann mehrere, gar keinen oder genau einen Fixpunkt haben, z.B. hat die durch $x \mapsto x$ definierte Abbildung $X \to X$ jeden Punkt als Fixpunkt, die durch $x \mapsto x^2$ definierte Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau die Fixpunkte 0 und 1, die durch $x \mapsto 3x$ definierte Abbildung genau den Fixpunkt 0 und die durch $x \mapsto x + 1$ definierte Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ keinen Fixpunkt.

3.3.3 DEFINITION

Eine Abbildung $f: \underline{X} \to \underline{X}$ heißt *kontrahierend*, wenn ein $q < 1$ so existiert, daß $d(f(x),f(y)) \leq q \cdot d(x,y)$ für alle $x \in X$ und $y \in X$ gilt.

3.3.4 THEOREM (*Banachscher Fixpunktsatz*)

Jede kontrahierende Abbildung $f: \underline{X} \to \underline{X}$ eines nicht-leeren, vollständigen metrischen Raumes $\underline{X}$ in sich hat genau einen Fixpunkt x. Für jedes beliebige $y \in X$ konvergiert die Folge $y, f(y), f(f(y)), \ldots$ gegen diesen Fixpunkt x.

Beweis:

Ist $f: \underline{X} \to \underline{X}$ kontrahierend, so gibt es ein positives $q < 1$ mit $d(f(x),f(y)) \leq q \cdot d(x,y)$ für alle $x \in X$, $y \in X$. Insbesondere ist f stetig. Für jedes $y \in X$ läßt sich durch Induktion eine Folge (y_n) folgendermaßen definieren: $y_1 = y$ und $y_{n+1} = f(y_n)$. Die Folge (y_n) ist eine Cauchy-Folge, denn es gilt

$d(y_{n+1},y_{n+2}) = d(f(y_n),f(y_{n+1})) \leq q \cdot d(y_n,y_{n+1}) \leq \ldots \leq q^n \cdot d(y_1,y_2)$,

und da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ konvergiert, gibt es für $y_1 \neq y_2$ zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n, so daß aus $m \geq n$ stets $\sum_{\nu=n}^{m} q^\nu < \frac{\varepsilon}{d(y_1,y_2)}$ und somit $d(y_{n+1},y_{m+2}) \leq \sum_{\nu=n}^{m} d(y_{\nu+1},y_{\nu+2}) \leq d(y_1,y_2) \cdot \sum_{\nu=n}^{m} q^\nu < \varepsilon$ folgt. Für $y_1 = y_2$ ist (y_n) konstant, also ebenfalls eine Cauchy-Folge. Somit konvergiert (y_n) gegen ein $x \in X$. Die Folge $(f(y_n))$ konvergiert als Teilfolge von (y_n) ebenfalls gegen x, woraus wegen der Stetigkeit von f folgt $x = f(x)$. Also ist x Fixpunkt von f. Ist y ebenfalls Fixpunkt von f, so gilt $d(x,y) = d(f(x),f(y)) \leq q \cdot d(x,y)$, woraus $d(x,y) = 0$ und somit $x = y$ folgt. Somit ist x einziger Fixpunkt von f.

3.3.5 BEISPIEL

Die durch $x \mapsto x + 1$ definierte Abbildung $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genügt der Bedingung $d(f(x),f(y)) \leq d(x,y)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$, hat aber keinen Fixpunkt. Die durch $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ definierte Abbildung $g: \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 1\} \to \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 1\}$ genügt der Bedingung $d(g(x),g(y)) < d(x,y)$ für alle $x,y \geq 1$ mit $x \neq y$, hat aber keinen Fixpunkt.

3.3.6 ANWENDUNG DES BANACHSCHEN FIXPUNKTSATZES AUF DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

PROBLEMFORMULIERUNG

Grundproblem der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ist folgendes:

Eine Differentialgleichung besteht aus 2 Daten:

(1) einer auf einer offenen Teilmenge A des $\mathbb{R}^2$ definierten reell-wertigen Funktion $f: A \to \mathbb{R}$,

(2) einem Punkt (a_o,b_o) in A (der sogenannten Anfangsbedingung).

Eine Lösung obiger Differentialgleichung ist jede auf einem den Punkt a_o im Inneren enthaltenden Intervall I definierte, differenzierbare Funktion $g: I \to \mathbb{R}$, die folgenden Bedingungen genügt:

(L0) für alle $x \in I$ gilt $(x,g(x)) \in A$,

(L1) für alle x aus I gilt $g'(x) = f(x,g(x))$,

(L2) $g(a_o) = b_o$.

Hauptprobleme sind:

(P1) die Frage nach der Existenz von Lösungen,

(P2) die Frage nach der Eindeutigkeit von Lösungen,

(P3) die Frage nach Verfahren zur Konstruktion von Lösungen.

PROBLEMUMFORMULIERUNG

Gegeben sei eine Differentialgleichung (A,f,a_o,b_o) mit stetigem f. Ist I ein den Punkt a_o im Innern enthaltendes Intervall, so ist eine stetige Funktion $g: \underline{I} \to \underline{\mathbb{R}}$ genau dann Lösung der Differentialgleichung, wenn sie folgenden Bedingungen genügt:

(I0) für alle $x \in I$ gilt $(x,g(x)) \in A$,

(I1) für alle $x \in I$ gilt $g(x) = b_o + \int_{a_o}^{x} f(t,g(t))dt$.

Somit ist die Differentialgleichung einer Integralgleichung äquivalent. [Beweis folgt unmittelbar aus dem Hauptsatz der Integralrechnung].

DIE LIPSCHITZ-BEDINGUNG

Ohne Voraussetzungen insbesondere an f läßt sich wenig über die Lösbarkeit von (A,f,a_o,b_o) sagen. Für "hinreichend gute" f gibt es jedoch "optimale" Antworten auf die Fragen (P1), (P2) und (P3).

DEFINITION

Ist K eine nicht-negative reelle Zahl, so genügt f der *Lipschitz-Bedingung* (K), falls für alle (x,y) und (x,y') aus A gilt:
$d(f(x,y),f(x,y')) \leq K \cdot d(y,y')$.
Obige Bedingung ist für geeignetes K häufig erfüllt, z.B. wenn f stetig partiell nach y ableitbar ist (zumindest in einer Umgebung von (a_o,b_o)).

DER SATZ VON CAUCHY-PICARD

(A,f,a_o,b_o) sei eine Differentialgleichung. Ist f stetig und genügt es der Lipschitz-Bedingung (K) für irgendein K, so gibt es ein a_o im Innern enthaltendes Intervall I und eine stetig differenzierbare Funktion $g: \underline{I} \to \underline{\mathbb{R}}$, die eindeutig dadurch gekennzeichnet ist, daß sie (L0), (L1) und (L2) erfüllt, d.h. Lösung von (A,f,a_o,b_o) ist. Darüber hinaus existiert ein einfaches Approximationsverfahren zur Konstruktion von g.

Beweis:

Es gibt positive Zahlen a,b mit $B = [a_o-a,a_o+a] \times [b_o-b,b_o+b] \subset A$.
Sei $M = 1 + \max\{|f(x,y)| \mid (x,y) \in B\}$. Sei $r = \min\{a,\frac{b}{M},\frac{2}{3(K+1)}\}$. Sei $I = [a_o-r,a_o+r]$. Sei $\underline{C^*(\underline{I})}$ der nach 3.1.11(5) vollständige metrische Raum aller beschränkten, stetigen Abbildungen von $\underline{I}$ nach $\underline{\mathbb{R}}$ (mit der Supremum-Metrik), und sei $\underline{X}$ der abgeschlossene und somit vollständige Teilraum von $\underline{C^*(\underline{I})}$, der aus allen stetigen Abbildungen $g: \underline{I} \to \underline{[b_o-b,b_o+b]}$ besteht. Durch

$g \mapsto Tg(x) = b_o + \int_{a_o}^{x} f(t,g(t))dt$ wird eine Abbildung $T: \underline{X} \to \underline{X}$ definiert, da aus $g \in \underline{X}$ stets

$d(Tg(x),b_o) = |\int_{a_o}^{x} f(t,g(t))dt| \leq r \cdot M \leq b$, also $Tg \in \underline{X}$ folgt. T ist kontrahierend, denn es gilt:

$$d(Tg,Th)=\sup_{x\in I}|\int_{a_o}^{x} f(t,g(t))dt-\int_{a_o}^{x} f(t,h(t))dt|\leq\sup_{x\in I}|\int_{a_o}^{x} K\cdot|g(t)-h(t)|dt|$$

$$\leq r(K+1)d(g,h) \leq \tfrac{2}{3}d(g,h).$$

Somit existiert nach dem Banachschen Fixpunktsatz 3.3.4 genau ein $g^* \in \underline{X}$ mit $T(g^*) = g^*$, d.h. genau eine Lösung g^* der Differentialgleichung (A,f,a_o,b_o). Darüber hinaus konvergiert für jedes $g \in \underline{X}$ die Folge $(T^n(g))$ in $\underline{X}$ gegen g^*.

3.3.7 AUFGABEN

(1) Sei r eine positive reelle Zahl. Zeigen Sie, daß durch die Vorschrift $x \mapsto \frac{1}{2}(x + \frac{r}{x})$ eine kontrahierende Abbildung $f: \underline{\{x \in \mathbb{R}^+ | x^2 \geq r\}} \to \underline{\{x \in \mathbb{R}^+ | x^2 \geq r\}}$ bestimmt wird. Bestimmen Sie den Fixpunkt von f.

(2) $A = (a_{ij})$ sei eine n-reihige, quadratische, reelle Matrix, $E=(\delta_{ij})$ sei die n-reihige Einheitsmatrix und $B = (b_{ij})$ sei gleich $E - A = (\delta_{ij}-a_{ij})$.

(a) Zeigen Sie: gilt $\mathrm{Max}\{\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| | i \in \{1,\ldots,n\}\} < 1$, so hat das Gleichungssystem $Ax = b$ für jeden n-reihigen reellen Vektor b genau eine Lösung x. [Hinweis: Forme die Gleichung $Ax = b$ äuqivalent um zu $Bx + b = x$ und benutze die Tatsache, daß $\mathbb{R}^n$ bzgl. der Maximum-Metrik d_M nach 3.1.11(1), 3.1.12(1) und 2.2.9(2) vollständig ist.]

(b) Zeigen Sie, daß das Gleichungssystem

$$\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{3}y = 1$$

$$-\tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{2}y = 1$$

die Voraussetzungen von (a) erfüllt, und berechnen Sie, ausgehend von $x_o = y_o = 0$ die ersten 3 Iterationen. Bestimmen Sie die Rekursionsformeln für x_n und y_n und zeigen Sie, daß (x_n,y_n) gegen die Lösung (x,y) des Gleichungssystems konvergiert.

3.4 DER BAIRESCHE KATEGORIENSATZ

3.4.1 DEFINITION

Eine Teilmenge A von $\underline{X}$ heißt

(1) *nirgends dicht* in $\underline{X}$, wenn $\mathrm{int}(\mathrm{cl}A) = \emptyset$ gilt,

(2) *von 1. Kategorie* oder *mager* in $\underline{X}$, wenn es eine Folge (A_n) nirgends dichter Teilmengen von $\underline{X}$ mit $A = \bigcup_1^\infty A_n$ gibt,

(3) *von 2. Kategorie* oder *fett* in $\underline{X}$, wenn A nicht mager in $\underline{X}$ ist.

Ein metrischer Raum $\underline{X}$ heißt von *2. Kategorie*, wenn X fett in $\underline{X}$ ist.

3.4.2 BEMERKUNG

Ist x ein *isolierter Punkt* von $\underline{X}$, d.h. gilt $\mathrm{int}\{x\} = \{x\}$, so ist jede Teilmenge A von $\underline{X}$, die x enthält, fett in $\underline{X}$. In diesem Fall ist die Aussage, eine Menge sei fett in $\underline{X}$, wenig nützlich. Enthält $\underline{X}$ hingegen keine isolierten Punkte, so besagt das Fettsein einer Teilmenge A von $\underline{X}$, daß A "sehr viele" Elemente enthält, z.B. ist jede höchstens abzählbare Teilmenge von $\underline{X}$ offenbar mager, jede fette Teilmenge von $\underline{X}$ also überabzählbar. Enthält insbesondere $\underline{X}$ keine isolierten Punkte und ist $\underline{X}$ von 2. Kategorie, so ist $\underline{X}$ in gewissem Sinne "sehr groß", und obige Begriffsbildungen erweisen sich als sehr nützlich. Typische Anwendungen sind Existenzsätze der folgenden Art: Ist A eine magere Teilmenge eines Raumes $\underline{X}$ von 2. Kategorie, so ist $X\backslash A$ nicht leer, sogar fett in $\underline{X}$.

Gelingt es uns z.B. zu zeigen, daß $\underline{\mathbb{R}}$ von 2. Kategorie ist, so können wir hieraus unmittelbar folgern, daß es irrationale Zahlen gibt, ja sogar überabzählbar viele, ohne daß wir eine einzige derartige Zahl konstruieren müssen.

3.4.3 THEOREM (*Baireschen Kategoriensatz*)

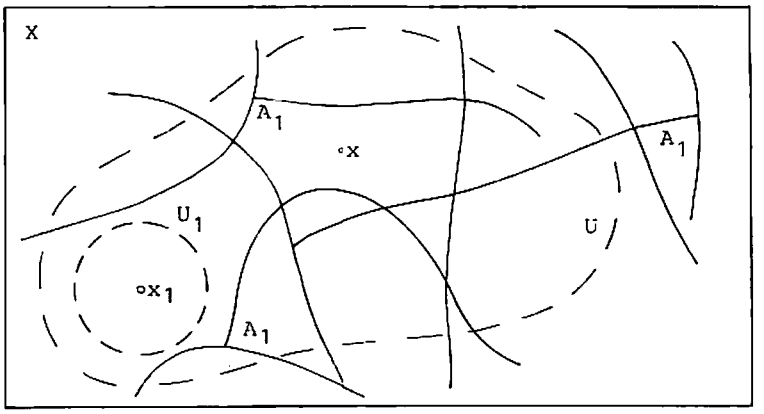
Jeder nicht-leere, vollständige metrische Raum $\underline{X}$ *ist von 2. Kategorie. Für jede magere Teilmenge* A *von* $\underline{X}$ *ist* $X\backslash A$ *dicht in* $\underline{X}$.

Beweis:

Es genügt, den zweiten Teil der Aussage zu beweisen, denn der erste Teil folgt dann für A = X per Widerspruchsbeweis. Sei $\underline{X}$ ein nichtleerer, vollständiger metrischer Raum, sei $A \subset X$ mager, sei $x \in X$ ein beliebiger Punkt von X und sei U eine offene Umgebung von x. Durch Induktion wird eine Folge (U_n) nicht-leerer offener Teilmengen von $\underline{X}$ folgendermaßen definiert (dabei sei (A_n) eine Folge nirgends

dichter Teilmengen von $\underline{X}$ mit $A = \bigcup_1^\infty A_n$):

Induktionsanfang: Da A_1 nirgends dicht in $\underline{X}$ ist, ist U keine Teilmenge von clA_1. Somit existiert ein $x_1 \in U$ und eine offene Umgebung U_1 von x_1 mit diam $U_1 < 1$ und $clU_1 \subset U \setminus clA_1$:



Induktionsschritt: Seien $U_1,\dots,U_n$ definiert. Da A_{n+1} nirgends dicht in $\underline{X}$ ist, ist U_n keine Teilmenge von clA_{n+1}. Somit existiert ein $x_{n+1} \in U_n$ und eine offene Umgebung U_{n+1} von x_{n+1} mit diam $U_{n+1} < \frac{1}{n+1}$ und $clU_{n+1} \subset U_n \setminus clA_{n+1}$. Folglich ist (U_n) eine monoton fallende Folge nicht-leerer Mengen mit $\lim_{n\to\infty} \text{diam}(U_n) = 0$. Nach 3.1.13 gilt $\bigcap_1^\infty clU_n \neq \emptyset$. Aus $y \in \bigcap_1^\infty clU_n$ folgt einerseits $y \in U$, anderseits $y \notin A_n$ für jedes n, also $y \notin A$, somit $y \in U \cap (X\setminus A)$. U war beliebige offene Umgebung von x. Also ist x Berührpunkt von $X\setminus A$. x war beliebiger Punkt von X. Also ist $X\setminus A$ dicht in $\underline{X}$.

3.4.4 DEFINITION

Ein Punkt $x \in X$ heißt *isoliert* in $\underline{X}$, falls $\{x\}$ offen in $\underline{X}$ ist (d.h. falls $\text{int}\{x\} = \{x\}$ gilt). Ein metrischer Raum $\underline{X}$ heißt *in sich dicht*, falls er keine isolierten Punkte besitzt.

3.4.5 SATZ

Jeder nicht-leere, in sich dichte, vollständige metrische Raum hat überabzählbar viele Punkte.

Beweis:

Jede höchstens abzählbare Teilmenge ist mager.

3.4.6 ANWENDUNG DES BAIRESCHEN KATEGORIENSATZES AUF LIMITES VON FOLGEN STETIGER FUNKTIONEN

(1) DEFINITION

Eine Funktion $f: X \to \underline{\mathbb{R}}$ heißt *einfacher* (oder *punktweiser*) Limes einer Folge (f_n) von Funktionen $f_n: X \to \underline{\mathbb{R}}$, falls für jedes $x \in X$ die Folge $(f_n(x))$ in $\underline{\mathbb{R}}$ gegen $f(x)$ konvergiert.

(2) Satz

Ist $f: \underline{\mathbb{R}} \to \underline{\mathbb{R}}$ *einfacher Limes einer Folge* (f_n) *stetiger Funktionen* $f_n: \underline{\mathbb{R}} \to \underline{\mathbb{R}}$, *so ist die Menge* $U = \{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ nicht stetig in } x\}$ *der Unstetigkeitspunkte von* f *mager in* $\underline{\mathbb{R}}$.

Beweis:

$U = \bigcup\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ mit $U_n = \{x \in \mathbb{R} \mid \omega_f(x) \geq \frac{1}{n}\}$. Es genügt zu zeigen, daß jedes U_n nirgends dicht in $\underline{\mathbb{R}}$ ist. Wäre U_{n_o} nicht nirgends dicht in $\underline{\mathbb{R}}$, so gäbe es ein abgeschlossenes Intervall $A \subset U_{n_o}$ mit positiver Länge. Wegen $A = \bigcup\{A_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ mit

$A_m = \{x \in A \mid \text{für alle } i \geq m \text{ gilt } |f(x) - f_i(x)| \leq \frac{1}{5n_o}\}$ folgte aus dem Baireschen Kategoriensatz, daß nicht alle A_m nirgends dicht in dem vollständigen metrischen Raum $\underline{A}$ sein könnten. Es gäbe somit ein $m_o \in \mathbb{N}$ und ein nicht-leeres offenes Intervall $B \subset \mathrm{cl}A_{m_o} \subset A$. Sei $x_o \in B$. Wegen der Stetigkeit von f_{m_o} gäbe es ein Intervall C mit $x_o \in C \subset B$, so daß aus $x \in C$ stets $|f_{m_o}(x_o) - f_{m_o}(x)| \leq \frac{1}{5n_o}$ folgte.

Somit würde aus $x \in C$ und $y \in C$ stets

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| \leq\ & |f(x) - f_{m_o}(x)| + |f_{m_o}(x) - f_{m_o}(x_o)| \\ & + |f_{m_o}(x_o) - f_{m_o}(y)| \\ & + |f_{m_o}(y) - f(y)| \leq \frac{4}{5n_o} \text{ folgen.} \end{aligned}$$

Folglich gälte $\omega_f(x_o) \leq \omega_f(C) \leq \frac{4}{5n_o} < \frac{1}{n_o}$ im Widerspruch zu $x_o \in U_{n_o}$.

Somit ist jedes U_n nirgends dicht in $\underline{\mathbb{R}}$, also U mager in $\underline{\mathbb{R}}$.

(3) FOLGERUNG

Die durch $x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{P} \end{cases}$ *definierte Abbildung* $\chi_{\mathbb{Q}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist nicht einfacher Limes einer Folge stetiger Funktionen von* $\underline{\mathbb{R}}$ *nach* $\underline{\mathbb{R}}$.

3.4.7 AUFGABEN

Zeigen Sie:

(1) Jede Vereinigung endlich vieler nirgends dichter Teilmengen von $\underline{X}$ ist nirgends dicht in $\underline{X}$.

(2) Jede Vereinigung höchstens abzählbar vieler magerer Teilmengen von $\underline{X}$ ist mager in $\underline{X}$.

(3) $\mathbb{P} = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ist fett in $\underline{\mathbb{R}}$.

(4) A ist genau dann nirgends dicht in $\underline{X}$, wenn eine Teilmenge von $X\backslash A$ existiert, die in $\underline{X}$ offen und dicht ist.

(5) $\underline{X}$ ist genau dann von 2. Kategorie, wenn in $\underline{X}$ jeder Durchschnitt höchstens abzählbar vieler offener, dichter Mengen nicht leer ist.

(6) In $\mathbb{R}^2$ ist die Menge $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ überabzählbar und mager.

(7) Ist A dicht in $\underline{X}$, so ist $\underline{X}$ genau dann in sich dicht, wenn der Teilraum $\underline{A}$ in sich dicht ist.

(8) $\underline{X}$ ist genau dann topologisch isomorph zu einem diskreten metrischen Raum, wenn jeder Punkt von X isoliert in $\underline{X}$ ist.

(9) Jeder abzählbar unendliche vollständige metrische Raum besitzt unendlich viele isolierte Punkte.

(1o) Seien X ein nicht-leerer, vollständiger metrischer Raum und F eine Menge stetiger Abbildungen von $\underline{X}$ nach $\underline{\mathbb{R}}$, so daß aus $x \in X$ stets $\operatorname{Sup}\{f(x) \mid f \in F\} < \infty$ folgt. Dann existiert eine nicht-leere offene Menge A in $\underline{X}$ mit $\operatorname{Sup}\{f(x) \mid f \in F \text{ und } x \in A\} < \infty$.

3.4.8 AUFGABEN

(1) Zeigen Sie, daß für jede abgeschlossene Teilmenge A von $\underline{X}$ die durch

$x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{falls } x \in X\backslash A \end{cases}$ definierte Abbildung $\chi_A\colon X \to \mathbb{R}$ einfacher Limes einer Folge stetiger Funktionen von $\underline{X}$ nach $\underline{\mathbb{R}}$ ist. [Hinweis: 3.2.8(2) und 2.3.3].

(2) Zeigen Sie, daß für jede endliche Teilmenge E von $\underline{X}$ die durch

$x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in E \\ 0, & \text{falls } x \in X\backslash E \end{cases}$ definierte Abbildung $\chi_E\colon X \to \mathbb{R}$ einfacher Limes einer Folge stetiger Funktionen von $\underline{X}$ nach $\underline{\mathbb{R}}$ ist.

(3) Gibt es eine Abbildung $g\colon \underline{\mathbb{R}} \to \underline{\mathbb{R}}$ mit $\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{R} \mid g \text{ stetig in } x\}$?

3.5 TOPOLOGISCH VOLLSTÄNDIGE RÄUME

Ist $f: \underline{X} \to \underline{Y}$ ein topologischer Isomorphismus, so ist eine Teilmenge A von $\underline{X}$ offenbar genau dann nirgends dicht (mager, fett) in $\underline{X}$, wenn f[A] nirgends dicht (mager, fett) in $\underline{Y}$ ist. Die Begriffe "nirgends dicht", "mager" und "fett" sowie der Begriff "$\underline{X}$ ist von 2.Kategorie" sind somit topologische Begriffe. Der Begriff "vollständig" ist hingegen ein uniformer Begriff. Beim Baireschen Kategoriensatz wird aus einer uniformen Voraussetzung ($\underline{X}$ nicht-leer und vollständig) eine topologische Folgerung ($\underline{X}$ von 2. Kategorie) gezogen. Jeder derartige Satz läßt sich sofort dadurch verbessern, daß man die Voraussetzung nur bis auf topologische Isomorphie fordert, d.h. im Falle des Baireschen Kategoriensatzes: Ist $\underline{X}$ topologisch isomorph zu einem nicht-leeren, vollständigen Raum, so ist $\underline{X}$ von 2. Kategorie. Hieraus folgt z.B. unmittelbar, daß $]0,1[$ - obwohl nicht vollständig - von 2. Kategorie ist. Dieser Sachverhalt deutet an, daß Räume, die zu einem vollständigen Raum topologisch isomorph sind, - auch wenn sie nicht ganz so schön zu sein brauchen wie vollständige Räume -, doch einige angenehme topologische Eigenschaften mit vollständigen Räumen gemeinsam haben.

3.5.1 DEFINITION

Ein metrischer Raum heißt *topologisch vollständig*, wenn er zu einem vollständigen metrischen Raum topologisch isomorph ist.

3.5.2 FOLGERUNG

Jeder nicht-leere, topologisch vollständige Raum ist von 2. Kategorie.

Beweis:

Sei $f: \underline{X} \to \underline{Y}$ ein topologischer Isomorphismus, und sei $\underline{Y}$ vollständig. Wäre $\underline{X}$ nicht von 2. Kategorie, so gäbe es eine Folge (A_n) nirgends dichter Teilmengen von $\underline{X}$ mit $X = \bigcup_1^\infty A_n$. Also wäre $(f[A_n])$ eine Folge nirgends dichter Teilmengen von $\underline{Y}$ mit $Y = \bigcup_1^\infty f[A_n]$ im Widerspruch zum Baireschen Kategoriensatz.

3.5.3 BEMERKUNG

$\underline{X} = (X,d)$ ist genau dann topologisch vollständig, wenn es eine zu d topologisch äquivalente Metrik d^* so gibt, daß (X,d^*) vollständig ist.

3.5.4 BEISPIELE

(1) Jeder vollständige Raum (insbesondere $\underline{\mathbb{R}}$ und $\underline{[0,1]}$) ist topologisch vollständig.

(2) $]0,1[$ ist topologisch vollständig, aber nicht vollständig.

(3) $\mathbb{Q}$ ist nicht topologisch vollständig, weil $\mathbb{Q}$ nicht von 2. Kategorie ist.

(4) $\mathbb{P} = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ist, wie wir in 3.5.7 sehen werden, topologisch vollständig.

3.5.5 SATZ

Ist $\underline{X}$ topologisch vollständig, so gilt:

(1) *Jeder abgeschlossene Teilraum von $\underline{X}$ ist topologisch vollständig.*

(2) *Jeder offene Teilraum von $\underline{X}$ ist topologisch vollständig.*

(3) *Jeder Durchschnitt $\underline{A} = \bigcap A_n$ einer Folge $(\underline{A_n})$ topologisch vollständiger Teilräume von $\underline{X}$ ist topologisch vollständig.*

(4) *Jeder G_δ-Teilraum von $\underline{X}$ ist topologisch vollständig.*

Beweis:

Sei $\underline{X} = (X,d)$, und sei d^* eine zu d topologisch äquivalente Metrik auf X, so daß (X,d^*) vollständig ist.

(1) Ist A abgeschlossene Teilmenge von $\underline{X}$ und sind d_A bzw. d_A^* die von d bzw. d^* induzierten Metriken auf A (d.h. $d_A = d|A \times A$ bzw. $d_A^* = d^*|A \times A$), so sind d_A und d_A^* ebenfalls topologisch äquivalent, und (A,d_A^*) ist nach 3.1.1o vollständig.

(2) Ist A eine offene Teilmenge von $\underline{X}$, so wird durch $d'(a,b) = d^*(a,b) + \left| \frac{1}{\mathrm{dist}(a,X\setminus A)} - \frac{1}{\mathrm{dist}(b,X\setminus A)} \right|$ ("dist" bezüglich d^*), wie man leicht nachrechnet, eine Metrik d' auf A definiert.
Konvergiert eine Folge (a_n) in A gegen einen Punkt $a \in A$ bzgl. d', so erst recht bzgl. d_A^*, denn es gilt $d_A^*(a,b) \le d'(a,b)$ für alle $a \in A$ und $b \in A$. Konvergiert umgekehrt eine Folge (a_n) in A gegen einen Punkt $a \in A$ bzgl. d_A^*, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} d'(a_n,a) = \lim_{n\to\infty} d^*(a_n,a) + \left|\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{dist}(a_n,X\setminus A)} - \frac{1}{\mathrm{dist}(a,X\setminus A)}\right|$$

$$= 0 + \left|\frac{1}{\mathrm{dist}(a,X\setminus A)} - \frac{1}{\mathrm{dist}(a,X\setminus A)}\right| = 0.$$ Also konvergiert (a_n) auch bzgl. d' gegen a. Die Metriken d_A^* und d' sind somit topologisch äquivalent. Ist (a_n) eine Cauchy-Folge in (A,d'), so ist (a_n) erst recht Cauchy-Folge in (X,d^*), konvergiert also gegen ein $x \in X$ bzgl. d^*. Liegt x in A, so konvergiert (a_n) gegen x bzgl. d'. Läge x nicht in A, so würde für jedes feste n gelten

$$\lim_{m\to\infty} d'(a_n,a_m) = \lim_{m\to\infty} d^*(a_n,a_m) + \left|\frac{1}{\mathrm{dist}(a_n,X\setminus A)} - \lim_{m\to\infty}\frac{1}{\mathrm{dist}(a_m,X\setminus A)}\right|$$
$$= d^*(a_n,x) + \left|\frac{1}{\mathrm{dist}(a_n,X\setminus A)} - \infty\right| = \infty,$$

im Widerspruch zu der Voraussetzung, daß (a_n) eine Cauchy-Folge bzgl. d' bildet. Also ist (A,d') vollständig.

(3) Für jedes n sei d_n eine zu d_{A_n} topologisch äquivalente Metrik auf A_n, so daß (A_n,d_n) vollständig ist. Dabei können wir wegen 2.2.9(5) ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß für $a \in A_n$ und $b \in A_n$ stets $d_n(a,b) \le \frac{1}{2^n}$ gilt. Auf $A = \bigcap_1^\infty A_n$ wird durch $d'(a,b) = \sum_{n=1}^\infty d_n(a,b)$ eine Metrik d' definiert. Konvergiert eine Folge (a_n) in A gegen ein $a \in A$ bzgl. d', so erst recht bzgl. jedem d_n und somit bzgl. d. Konvergiert umgekehrt eine Folge (a_n) in A gegen ein $a \in A$ bzgl. d, so bzgl. d_n für jedes n. Hieraus folgt, daß (a_n) bzgl. d' gegen a konvergiert, denn für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein r mit $\sum_{n=r+1}^\infty \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$, und für jedes $i = 1,\dots,r$ gibt es ein n_i, so daß aus $m \ge n_i$ stets $d_i(a_m,a) < \frac{\varepsilon}{2r}$ folgt. Also folgt aus $m \ge \max\{n_1,n_2,\dots,n_r\}$ stets

$d'(a_m,a) = \sum_{n=1}^\infty d_n(a_m,a) < r \cdot \frac{\varepsilon}{2r} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Somit ist d' zu d_A topologisch äquivalent. Ist (a_n) Cauchy-Folge in (A,d'), so ist (a_n) Cauchy-Folge bzgl. jedes d_m, konvergiert also in jedem Raum (A_m,d_m) gegen einen Wert a, der (wegen der Äquivalenz der Metriken $d_m|A \times A$) nicht von m abhängt und somit in $A = \bigcap A_m$ liegt. Folglich konvergiert (a_n) in (A,d') gegen a. Also ist (A,d') vollständig.

(4) folgt unmittelbar aus (2) und (3).

<u>3.5.6 SATZ</u>

Für jede Teilmenge A eines topologisch vollständigen Raumes $\underline{X}$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(a) $\underline{A}$ *ist topologisch vollständig.*

(b) A *ist eine* G_δ*-Menge in* $\underline{X}$.

Beweis:

(b) $\Rightarrow$ (a) folgt unmittelbar aus 3.5.5(4).

(a) $\Rightarrow$ (b): Sei $f\colon \underline{A} \to \underline{Y}$ ein topologischer Isomorphismus von $\underline{A}$ auf einen vollständigen Raum. Nach dem Fortsetzbarkeitstheorem für stetige Abbildungen in vollständige Räume (3.2.13) existiert eine A umfassende G_δ-Menge B in $\underline{X}$ mit $B \subset \mathrm{cl}A$ und eine stetige Fortsetzung $G\colon \underline{B} \to \underline{Y}$

von f. Aber f kann auf keinen Punkt von clA\A stetig fortgesetzt werden, denn ist (a_n) eine Folge in A mit $(a_n) \to x$, so gilt für jede stetige Fortsetzung h von f: $(a_n) = (f^{-1}(h(a_n))) \to f^{-1}(h(x))$, also $x = f^{-1}(h(x)) \in A$. Somit gilt A = B, und A ist eine G_δ-Menge in $\underline{X}$.

3.5.7 FOLGERUNG 1

$\underline{\mathbb{P}}$ *ist topologisch vollständig.*

Beweis:

$\mathbb{P} = \bigcap_{r \in \mathbb{Q}} \mathbb{R} \setminus \{r\}$ ist eine G_δ-Menge in $\underline{\mathbb{R}}$ (vgl. 3.5.5(2),(3)).

3.5.8 FOLGERUNG 2

$\mathbb{Q}$ *ist keine* G_δ-Menge in $\underline{\mathbb{R}}$.

Beweis:

$\mathbb{Q}$ ist nach 3.5.4(3) nicht topologisch vollständig.

3.5.9 AUFGABE

Gibt es einen Raum von 2. Kategorie, der nicht topologisch vollständig ist?

3.5.1o AUFGABEN

Zeigen Sie:

(1) Für jede stetige Abbildung f: $\underline{A} \to \underline{Y}$ eines Teilraumes $\underline{A}$ von $\underline{X}$ in einen topologisch vollständigen Raum $\underline{Y}$ existiert eine A umfassende G_δ-Menge B in $\underline{X}$ und eine stetige Fortsetzung g: $\underline{B} \to \underline{Y}$ von f.

(2) Ist $\underline{X}$ topologisch vollständig und in sich dicht, so enthält jede nicht-leere offene Teilmenge von $\underline{X}$ überabzählbar viele Punkte.

(3) Der Durchschnitt jeder Folge dichter G_δ-Mengen in einem topologisch vollständigen metrischen Raum $\underline{X}$ ist dicht in $\underline{X}$.

(4) Für jedes Intervall I von $\mathbb{R}$ (d.h. jede Teilmenge I von $\mathbb{R}$ mit $(a < b < c$ und $\{a,c\} \in I) \Rightarrow b \in I)$ ist $\underline{I}$ topologisch vollständig.

3.6 VERVOLLSTÄNDIGUNG METRISCHER RÄUME

In den vorigen Abschnitten ist deutlich geworden, daß vollständige metrische Räume eine Reihe angenehmer Eigenschaften haben (man denke z.B. an den Banachschen Fixpunktsatz, den Baireschen Kategoriensatz und den Fortsetzbarkeitssatz für gleichmäßig stetige Abbildungen in vollständige Räume). Nicht vollständige Räume (z.B. $\mathbb{Q}$) haben i. allg. keine der genannten Eigenschaften und sind deshalb erheblich schlech-

ter zu handhaben. Mit dieser Situation wurden wir bereits in der Analysis konfrontiert, und wir haben dort eine Methode kennengelernt, die Mathematiker in derartigen Fällen oft und gerne anwenden. Hat ein Objekt mathematischer Untersuchungen nicht die gewünschten angenehmen Eigenschaften, so kann man versuchen, das Objekt in ein größeres Objekt "einzubetten", das die gewünschten angenehmen Eigenschaften hat. Gelingt das und ist die Einbettung zudem noch besonders übersichtlich, so spart man sich oft viel Ärger. In der Analysis wurde der unvollständige Raum $\mathbb{Q}$ deshalb in den vollständigen Raum $\mathbb{R}$ eingebettet. Manch einem mag die Analysis zwar nicht immer leicht vorgekommen sein, die Vorstellung allerdings, Analysis in $\mathbb{Q}$ statt in $\mathbb{R}$ betreiben zu müssen, ist ein Alptraum. Viele Dinge würden überhaupt nicht funktionieren (schon das Wurzelziehen ginge ja nicht mehr) und andere würden furchtbar kompliziert. Ohne die geniale Idee, reelle Zahlen zu erfinden, um $\mathbb{Q}$ zu vervollständigen, wäre Analysis in der heutigen Gestalt ganz undenkbar. Somit ergibt sich in unserem Zusammenhang ganz natürlich die Frage, ob es möglich ist, jeden metrischen Raum in einen vollständigen metrischen Raum einbetten zu können, d.h. ihn als Teilraum eines geeigneten vollständigen metrischen Raumes auffassen zu können. Das Hauptergebnis dieses Abschnittes gibt eine positive Antwort auf diese Frage. Ist insbesondere $\underline{X}$ ein Teilraum des $\mathbb{R}^n$, so ist jeder abgeschlossene Teilraum des $\mathbb{R}^n$, der X umfaßt, ein vollständiger Raum, der $\underline{X}$ als Teilraum besitzt. I. allg. läßt sich ein Raum $\underline{X}$ also in sehr verschiedene vollständige Räume einbetten. Unter allen vollständigen, $\underline{X}$ umfassenden Räumen gibt es aber einen "kleinsten", der dadurch charakterisiert ist, daß X dicht in ihm liegt. Diesen werden wir die Vervollständigung von $\underline{X}$ nennen. Ist insbesondere $\underline{X}$ ein Teilraum von $\mathbb{R}^n$, so ist der durch die abgeschlossene Hülle von X in $\mathbb{R}^n$ gebildete Teilraum von $\mathbb{R}^n$ die Vervollständigung von $\underline{X}$. Speziell ist $\mathbb{R}^n$ die Vervollständigung von $\mathbb{Q}^n$ für jedes n.

3.6.1 DEFINITION

Der metrische Raum $\underline{Y}$ heißt *Vervollständigung* des metrischen Raumes $\underline{X}$, wenn gilt:

(1) $\underline{Y}$ ist ein vollständiger metrischer Raum,

(2) $\underline{X}$ ist ein dichter Teilraum von $\underline{Y}$.

Bevor wir eine Vervollständigung von $\underline{X}$ konstruieren, wollen wir zeigen, daß es "im wesentlichen" nur eine solche gibt:

3.6.2 SATZ

Sind $\underline{Y_1}$ und $\underline{Y_2}$ Vervollständigungen von $\underline{X}$, so gibt es einen metrischen Isomorphismus $f: \underline{Y_1} \to \underline{Y_2}$ mit $f(x) = x$ für alle $x \in \underline{X}$.

Beweis:

Nach dem Fortsetzbarkeitssatz für gleichmäßig stetige Abbildungen in vollständige Räume (3.2.3) gibt es eine gleichmäßig stetige Abbildung $f: \underline{Y_1} \to \underline{Y_2}$ mit $f(x) = x$ für alle $x \in X$. Sind y und y' beliebige Elemente von $\underline{Y_1}$ und (x_n) bzw. (x_n') Folgen in X mit $(x_n) \to y$ und $(x_n') \to y'$, so gilt $(f(x_n)) \to f(y)$ und $(f(x_n')) \to f(y')$. Somit gilt wegen der Stetigkeit von d (vgl. 2.1.15(3))

$$d(f(y), f(y')) = \lim_{n\to\infty} d(f(x_n), f(x_n')) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_n') = d(y,y').$$

(Überlegen Sie sich, daß f insbesondere injektiv ist.)

Also ist der durch $f[Y_1]$ bestimmte Teilraum von $\underline{Y_2}$ metrisch isomorph zu $\underline{Y_1}$, somit vollständig und nach 3.1.1o abgeschlossen in $\underline{Y_2}$. Wegen $X \subset f[Y_1] \subset Y_2 = \mathrm{cl}\, X$ folgt hieraus $f[Y_1] = Y_2$, d.h. $f: \underline{Y_1} \to \underline{Y_2}$ ist ein metrischer Isomorphismus.

3.6.3 SATZ

Ist ein metrischer Raum $\underline{X}$ metrisch isomorph zu einem Teilraum eines vollständigen Raumes, so hat $\underline{X}$ eine Vervollständigung.

Beweis:

Ist $\underline{X}$ metrisch isomorph zu einem Teilraum eines vollständigen Raumes, so ist $\underline{X}$ metrisch isomorph zu einem dichten Teilraum $\underline{X'}$ eines vollständigen Raumes $\underline{Y}$, denn abgeschlossene Teilräume von vollständigen Räumen sind nach 3.1.1o vollständig. Identifiziert man in $\underline{Y}$ den Teilraum $\underline{X'}$ mit $\underline{X}$, so erhält man eine Vervollständigung von $\underline{X}$.

3.6.4 THEOREM (*Einbettungssatz für metrische Räume*)

Jeder metrische Raum $\underline{X} = (X,d)$ ist metrisch isomorph zu einem Teilraum des vollständigen metrischen Raumes $\underline{B(X)} = (B(X),d')$ aller beschränkten Abbildungen $f: X \to \underline{\mathbb{R}}$ mit der in 1.1.4 definierten Supremum-Metrik d'.

Beweis:

Der Raum $\underline{B(X)}$ ist nach 3.1.11(4) vollständig. Ist $X = \emptyset$, so ist (X,d) offenbar zu einem Teilraum von $\underline{B(X)}$ isometrisch isomorph. Andernfalls sei a ein festes Element von X. Für jedes $x \in X$ wird durch

$y \mapsto d(y,x) - d(y,a)$ eine Abbildung $f_x: X \to \mathbb{R}$ definiert. Wegen $|f_x(y)| = |d(y,x) - d(y,a)| \leq d(x,a)$ ist f_x beschränkt und somit ein Element von $B(X)$. Durch $x \mapsto f_x$ wird also eine Abbildung $f: X \to B(X)$ definiert. Für beliebige Elemente $x \in X$ und $x' \in X$ gilt einerseits
$|f_x(x) - f_{x'}(x)| = |d(x,x) - d(x,a) - d(x,x') + d(x,a)| = d(x,x')$
und andererseits für alle $y \in X$

$$|f_x(y) - f_{x'}(y)| = |d(y,x) - d(y,a) - d(y,x') + d(y,a)|$$
$$= |d(y,x) - d(y,x')| \leq d(x,x').$$

Hieraus folgt $d'(f_x,f_{x'}) = \sup_{y \in X} |f_x(y) - f_{x'}(y)| = d(x,x')$.

(Insbesondere ist f injektiv.) Also ist $\underline{X}$ metrisch isomorph zu dem durch $f[X]$ bestimmten Teilraum von $\underline{B(X)}$.

3.6.5 THEOREM (*Vervollständigungssatz für metrische Räume*)
Jeder metrische Raum hat eine Vervollständigung.

Beweis:
Das Ergebnis folgt unmittelbar aus den beiden vorangegangenen Sätzen.

3.6.6 DEFINITION
Die nach 3.6.5 existierende und nach 3.6.2 "im wesentlichen" eindeutige Vervollständigung von $\underline{X}$ werde mit Compl $\underline{X}$ bezeichnet. Compl ist eine Abkürzung des englischen Wortes completion (= Vervollständigung).

3.6.7 BEISPIELE
Ist A eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und ist $B = \mathrm{cl}A$ die abgeschlossene Hülle von A in $\underline{\mathbb{R}^n}$, so ist $\underline{B}$ Vervollständigung von $\underline{A}$. Insbesondere ist $\underline{\mathbb{R}^n}$ Vervollständigung von $\underline{\mathbb{Q}^n}$ und von $\underline{\mathbb{P}^n}$, $\underline{[0,1]^n}$ ist Vervollständigung von $\underline{]0,1[^n}$ und von $\underline{[0,1[^n}$ und $\underline{\mathbb{R}^+} = \underline{\{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}}$ ist Vervollständigung von $\underline{\{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}}$. Hieraus folgt u.a., daß $\underline{\text{Compl }]0,1[\setminus]0,1[} = \underline{\{0,1\}}$ zweipunktig und $\underline{\text{Compl } \{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}\setminus\{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}} = \{0\}$ nur einpunktig ist. Das liefert - zusammen mit dem folgenden Satz - einen besonders einfachen Beweis dafür, daß $\underline{]0,1[}$ und $\underline{\{r \in \mathbb{R} \mid r > 0\}}$ nicht uniform isomorph sind.

3.6.8 SATZ (*Vervollständigung ist ein uniformes Konzept*)
Sind $\underline{X}$ *und* $\underline{Y}$ *uniform isomorph, so sind auch*
(1) Compl $\underline{X}$ *und* Compl $\underline{Y}$ *uniform isomorph,*
(2) Compl $\underline{X}\setminus\underline{X}$ *und* Compl $\underline{Y}\setminus\underline{Y}$ *uniform isomorph.*

Beweis:
Ist $f: \underline{X} \to \underline{Y}$ ein uniformer Isomorphismus mit $g = f^{-1}: \underline{Y} \to \underline{X}$, so exi-

stieren nach dem Fortsetzbarkeitstheorem für gleichmäßig stetige Abbildungen in vollständige Räume (3.2.3) gleichmäßig stetige Fortsetzungen f': Compl $\underline{X} \to$ Compl $\underline{Y}$ von f und g': Compl $\underline{Y} \to$ Compl $\underline{X}$ von g. Somit ist $g' \circ f'$: Compl $\underline{X} \to$ Compl $\underline{X}$ ebenso wie die Identität id: Compl $\underline{X} \to$ Compl $\underline{X}$ eine gleichmäßig stetige Fortsetzung der durch $x \mapsto x$ definierten Abbildung $\underline{X} \to$ Compl $\underline{X}$. Wegen der Eindeutigkeit der Fortsetzung folgt hieraus $g' \circ f' = \mathrm{id}$. Analog gilt $f' \circ g' = \mathrm{id}$. Somit ist f': Compl $\underline{X} \to$ Compl $\underline{Y}$ ein uniformer Isomorphismus mit $g' = (f')^{-1}$. Aus $f'[X] = f[X] = Y$ folgt $f'[\text{Compl } \underline{X}\backslash X] = \text{Compl } \underline{Y}\backslash Y$. Also induziert f' einen uniformen Isomorphismus $\underline{\text{Compl } \underline{X}\backslash X} \to \underline{\text{Compl } \underline{Y}\backslash Y}$.

<u>3.6.9 THEOREM</u> (*Charakterisierungssatz für topologisch vollständige Räume*)

Ist $\underline{X}$ *ein metrischer Raum, so sind äquivalent:*

(a) $\underline{X}$ *ist topologisch vollständig.*

(b) X *ist eine* G_δ*-Menge in* Compl $\underline{X}$.

(c) X *ist* G_δ*-Menge eines vollständigen Raumes* $\underline{Y}$.

Beweis:

(a) $\Rightarrow$ (b) und (c) $\Rightarrow$ (a) folgen unmittelbar aus 3.5.6.

(b) $\Rightarrow$ (c) ist trivial.

<u>3.6.1o BEMERKUNG</u>

Wegen der Wichtigkeit des Vervollständigungssatzes für metrische Räume (3.6.5) wollen wir hier noch einen zweiten, von Felix Hausdorff stammenden Beweis skizzieren, welcher der Konstruktion von $\underline{\mathbb{R}}$ aus $\underline{\mathbb{Q}}$ mittels Cauchy-Folgen nachgebildet ist. (Der vorher dargestellte Beweis stammt von K. Kuratowski.) Zunächst einige Vorbereitungen:

(1) Sind (x_n) und (y_n) Cauchy-Folgen in $\underline{X}$, so konvergiert die Folge $(d(x_n,y_n))$ in $\underline{\mathbb{R}}$.

Beweis:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein n, so daß aus $m \geq n$ und $m' \geq n$ sowohl $d(x_m,x_{m'}) < \frac{\varepsilon}{2}$ als auch $d(y_m,y_{m'}) < \frac{\varepsilon}{2}$ folgt. Aus $m,m' \geq n$ folgt insbesondere $d(x_m,y_m) \leq d(x_m,x_{m'}) + d(x_{m'},y_{m'}) + d(y_{m'},y_m) < d(x_{m'},y_{m'}) + \varepsilon$ und ebenso $d(x_{m'},y_{m'}) < d(x_m,y_m) + \varepsilon$, also $|d(x_m,y_m)-d(x_{m'},y_{m'})| < \varepsilon$. Die Folge $(d(x_n,y_n))$ ist somit Cauchy-Folge in dem vollständigen Raum $\underline{\mathbb{R}}$, konvergiert also.

(2) Ist (x_n) Cauchy-Folge in $\underline{X}$, so gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{m\to\infty} d(x_n,x_m) = 0$.

Beweis:
Für festes n ist die konstante Folge (a) mit $a = x_n$ Cauchy-Folge; also konvergiert $(d(a,x_m)) = (d(x_n,x_m))$ nach (1) gegen einen Wert r_n. Offenbar gilt $r_n \leq \operatorname{diam}\{x_m \mid m \geq n\}$. Also konvergiert die Folge (r_n) nach 3.1.3 gegen 0.

(3) Ist A dicht in $\underline{Y}$ und konvergiert jede Cauchy-Folge (a_n) in A gegen ein $y \in \underline{Y}$, so ist $\underline{Y}$ vollständig.

Beweis:
Ist (y_n) eine Cauchy-Folge in $\underline{Y}$, so gibt es zu jedem n ein $a_n \in A$ mit $d(y_n,a_n) < \frac{1}{n}$. Eine derart gebildete Folge (a_n) ist zu (y_n) benachbart, also nach 3.1.7 ebenfalls eine Cauchy-Folge. Konvergiert (a_n) gegen y, so konvergiert nach 1.3.16 auch (y_n) gegen y.

(4) Der Raum der Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen:
Sei C die Menge aller Cauchy-Folgen von $\underline{X}$. Durch $((x_n),(y_n)) \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$ wird eine Abbildung $d': C \times C \to \mathbb{R}^+$ definiert (vgl. (1)).
Offenbar gilt:
(a) $(x_n) = (y_n) \Rightarrow d'((x_n),(y_n)) = 0$,
(b) $d'((x_n),(y_n)) = d'((y_n),(x_n))$,
(c) $d'((x_n),(y_n)) \leq d'((x_n),(z_n)) + d'((z_n),(y_n))$.

Die Abbildung d' erfüllt also beinahe die Axiome für eine Metrik auf C. Es gilt aber i. allg. nicht $d'((x_n),(y_n)) = 0 \Rightarrow (x_n) = (y_n)$. Vielmehr gilt: $d'((x_n),(y_n)) = 0 \Longleftrightarrow (x_n)$ und (y_n) sind benachbart.
Die Benachbartseinrelation ist eine Äquivalenzrelation auf C. Sei Y die Menge aller zugehörigen Äquivalenzklassen. Für $(x_n) \in C$ bezeichne $[(x_n)]$ die zugehörige Äquivalenzklasse. Aus $[(x_n)] = [(x_n')]$ und $[(y_n)] = [(y_n')]$ folgt, wie man leicht sieht, $d'((x_n),(y_n)) = d'((x_n'),(y_n'))$. Somit gibt es eine Abbildung $d^*: Y \times Y \to \mathbb{R}^+$ mit $d^*([(x_n)],[(y_n)]) = d'((x_n),(y_n))$ für alle $(x_n) \in C$ und $(y_n) \in C$. Offenbar ist d^* eine Metrik auf Y, das Paar (Y,d^*) also ein metrischer Raum. Bezeichnet $(\underline{x})$ für jedes $x \in X$ die durch $x_n = x$ definierte konstante Folge (x_n), so wird durch $x \mapsto [(\underline{x})]$ eine Abbildung $h: \underline{X} \to \underline{Y}$ definiert. Offenbar gilt $d^*(h(x),h(y)) = d(x,y)$ für alle $x \in X$ und $y \in X$. Somit ist $\underline{X}$ metrisch isomorph zu dem durch $A = \{[(\underline{x})] \mid x \in X\}$ bestimmten Teilraum von $\underline{Y}$. A ist dicht in $\underline{Y}$; denn ist $y = [(x_n)] \in Y$, so ist für jedes feste n die durch die konstante Folge $(\underline{x_n})$ bestimmte Äquivalenzklasse $a_n = [(\underline{x_n})]$ ein Element von A, und die Folge (a_n) konvergiert in $\underline{Y}$ gegen Y. Letzteres folgt aus $\lim\limits_{n\to\infty} d^*(a_n,y) =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{m\to\infty} d(x_n,x_m) = 0$. Ist (a_n) eine Cauchy-Folge in A, so gibt es zu jedem n genau ein $x_n \in X$ mit $a_n = [(\underline{x_n})]$. Die Folge (x_n) ist Cauchy-Folge in $\underline{X}$. Also ist $y = [(x_n)]$ ein Element von Y. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} d^*(a_n,y) = \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{m\to\infty} d(x_n,x_m) = 0$ konvergiert (a_n) in $\underline{Y}$ gegen y. Somit ist $\underline{Y}$ nach (3) vollständig.

3.6.11 AUFGABEN

(1) Sei $X = \mathbb{Q} \times]0,1[$. Auf X wird durch

$$d((x,y),(x',y')) = \begin{cases} |y - y'|, & \text{falls } x = x' \\ |x - x'| + y + y', & \text{falls } x \neq x' \end{cases}$$

eine Metrik definiert. Beschreiben Sie die Vervollständigung Compl $\underline{X}$ von $\underline{X} = (X,d)$.

(2) Seien $\underline{X}$ und $\underline{Y}$ die durch $X = (]-1,1[\times \{0\}) \cup (\{0\} \times]0,1[)$ und $Y = (]-1,1[\times \{0\}) \cup (\{0\} \times]-1,1[)$ bestimmten Teilräume von $\underline{\mathbb{R}^2}$. Prüfen Sie, ob $\underline{X}$ und $\underline{Y}$ uniform isomorph sind.

3.6.12 AUFGABEN

Zeigen Sie

(1) Folgende Aussagen sind äuqivalent:

(a) X ist offen in Compl $\underline{X}$

(b) Jeder Punkt von X besitzt eine vollständige Umgebung U in $\underline{X}$ (d.h. $\underline{U}$ ist vollständig).

(c) Compl $\underline{X}\backslash X$ ist vollständig.

(2) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $\underline{X}$ ist vollständig.

(b) Für jeden metrischen Raum $\underline{Y}$ gilt: ist $\underline{X}$ Teilraum von $\underline{Y}$, so ist X abgeschlossen in $\underline{Y}$.

(3) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) Für jeden metrischen Raum $\underline{Y}$ gilt: ist $\underline{X}$ Teilraum von $\underline{Y}$, so ist X offen in $\underline{Y}$.

(b) $X = \emptyset$.